ХМЕЛЬНИЦЬКА ОБЛАСНА РАДА
ХМЕЛЬНИЦЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ УПРАВЛІННЯ ТА ПРАВА
ІМЕНІ ЛЕОНІДА ЮЗЬКОВА

ЗАТВЕРДЖЕНО
Рішення методичної ради
університету
22 жовтня 2025 року
Протокол № 2

Голова методичної ради

______________Ірина КОВТУН
(підпис)

(ініціали, прізвище)
22 жовтня 2025 року
м.п.

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ
з навчальної дисципліни
«ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА»
для підготовки на першому освітньому рівні
здобувачів вищої освіти ступеня бакалавра
за спеціальністю D2 Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок
галузі знань D Бізнес, адміністрування та право
за заочною формою навчання

м. Хмельницький
2025

РОЗРОБНИКИ:

Доцентка кафедри фінансів, банківської справи,
страхування та фондового ринку,
кандидатка економічних наук, доцентка ________ Тетяна ФАСОЛЬКО

В.о. доцентки кафедри фінансів, банківської справи,
страхування та фондового ринку,
кандидатка педагогічних наук, доцентка ________ Людмила НОВИЦЬКА
25 вересня 2025 року

СХВАЛЕНО
Рішення кафедри фінансів, банківської справи,
страхування та фондового ринку
25 вересня 2025 року, протокол № 2

Завідувачка кафедри, кандидатка економічних
наук, доцентка ________ Алла КРУШИНСЬКА
25 вересня 2025 року

Деканеса факультету управління та економіки,
кандидатка економічних наук, доцентка ________ Тетяна ТЕРЕЩЕНКО
22 жовтня 2025 року

Обліковий обсяг – 2,45 ум. др. арк.

ЗМІСТ

1. Структура вивчення навчальної дисципліни

1.1. Тематичний план навчальної дисципліни

№ теми	Назва теми	Кількість годин											
		Денна форма навчання						Заочна форма навчання					
		Усього	у тому числі					Усього	у тому числі				
			Лекції	Сем. (прак).	Лабор.	Ін.зав.	СРС		Лекції	Сем. (прак).	Лабор.	Ін.зав.	СРС
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1.	Елементи теорії визначників	6	2	2	–	–	2	6	–	–	–	–	6
2.	Основи теорії матриць	6	2	2	–	–	2	6	–	–	–	–	6
3.	Системи лінійних алгебраїчних рівнянь	8	2	2	–	–	4	8	2	–	–	–	6
4.	Функціональна залежність.	6	2	2	–	–	2	6	–	–	–	–	6
5.	Основи теорії границь функції	8	2	2	–	–	4	8	–	2	–	–	6
6.	Неперервність функції	8	2	2	–	–	4	8	–	–	–	–	8
7.	Похідна функції	8	2	2	–	–	4	8	2	–	–	–	6
8.	Диференціал функції	6	2	2	–	–	2	6	–	–	–	–	6
9.	Застосування похідної до дослідження функції	8	2	2			4	8	–	2	–	–	6
10.	Невизначений інтеграл	8	2	2	–	–	4	8	2	–	–	–	6
11.	Визначений інтеграл	8	2	2	–	–	4	8	2	–	–	–	6
12.	Основні поняття теорії імовірностей	8	2	2	–	–	4	8	–	–	–	–	8
13.	Теореми множення і додавання ймовірностей та їх наслідки	8	2	2	–	–	4	8	2	–	–	–	6
14.	Повторні незалежні випробування	8	2	2	–	–	4	8	–	2	–	–	6
15.	Дискретні випадкові величини	8	2	2	–	–	4	8	–	2	–	–	6
16.	Неперервні випадкові величини	8	2	2	–	–	4	8	–	–	–	–	8
	Всього годин:	120	32	32	–	–	56	120	10	8	–	–	102

1.2. Лекції

№ з/п	Назва і план теми	Заочна форма
1	2	3
	Елементи теорії визначників	-
1.1. 1.2. 1.3. 1.4.	Поняття визначника та його порядок. Визначники другого і третього порядків. Основні властивості визначників. Обчислення визначників за теоремою розкладання.	
	Основи теорії матриць	-
2.1. 2.2. 2.3. 2.4. 2.5.	Мінори і алгебраїчні доповнення. Розкладання визначника за елементами рядка або стовпця. Види матриць. Елементарні перетворення матриць. Ранг матриці. Добуток матриці. Обернена матриця. Добуток прямокутних матриць. Додавання матриць і множення матриць на число. Матричні рівняння.	
	Системи лінійних алгебраїчних рівнянь	2
3.1. 3.2. 3.3.	Поняття про системи лінійних рівнянь. Розв'язок системи лінійних рівнянь. Сумісні і несумісні системи рівнянь. Визначені і невизначені системи лінійних рівнянь. Розв'язування систем рівнянь методом послідовного виключення невідомих (методом Гауса).	
	Функціональна залежність	-
4.1. 4.2. 4.3.	Поняття функції. Способи задавання функції. Область визначення та область значень функції. Властивості функцій: обмеженість і необмеженість, зростання й спадання функції, парність і непарність, періодичність. Класифікація функцій. Елементарні функції та їх графіки. Поняття оберненої функції.	
	Основи теорії границь функції	-
5.1. 5.2. 5.3. 5.4. 5.5.	Числова послідовність. Означення границі послідовності. Нескінченно малі та великі величини. Означення границі функції. Односторонні границі. Властивості функцій, що мають скінченні границі. Визначні границі.	
	Неперервність функції	-
6.1. 6.2. 6.3. 6.4. 6.5.	Означення неперервності функції в точці. Неперервність функції на відрізку. Арифметичні операції над неперервними функціями. Класифікація розривів. Властивості неперервних функцій. Неперервність елементарних функцій.	
	Похідна функції	2
7.1. 7.2.	Означення похідної. Геометричний та економічний зміст похідної. Похідні елементарних функцій. Похідна оберненої функції.	

7.3. 7.4. 7.5.	Таблиця похідних. Правила обчислення похідних. Похідна складної функції. Похідні вищих порядків. Правило Лопіталя обчислення границь. Основні теореми диференціального числення.	
	Диференціал функції	-
8.1. 8.2. 8.3. 8.4.	Визначення диференціалу. Диференціал суми, добутку і частки. Інваріантність форми першого диференціалу. Диференціали вищих порядків. Застосування диференціалу до наближених обчислень. .	
	Застосування похідної до дослідження функції	-
9.1. 9.2. 9.3.	Монотонність та екстремуми функції. Опуклість, угнутість та точки перегину. Загальна схема дослідження та побудова графіка функції.	
	Невизначений інтеграл	2
10.1. 10.2. 10.3. 10.4.	Поняття первісної функції і невизначеного інтегралу. Геометричний та економічний зміст інтегралу. Таблиця основних інтегралів. Основні властивості невизначеного інтегралу. Найпростіші методи інтегрування: метод безпосереднього інтегрування, заміна змінної у невизначеному інтегралі, інтегрування частинами.	
	Визначений інтеграл	2
11.1. 11.2. 11.3. 11.4.	Поняття визначеного інтегралу. Властивості визначеного інтегралу. Формула Ньютона-Лейбниця. Заміна змінної у визначеному інтегралі. Інтегрування частинами. Геометричні застосування визначеного інтегралу	
	Основні поняття теорії імовірностей	-
12.1. 12.2. 12.3. 12.4.	Елементи комбінаторики в теорії ймовірностей. Випадкові події та їх класифікація. Класичне означення ймовірності. Основні властивості ймовірностей. Відносна частота випадкової події. Операції над подіями (алгебра подій).	
	Теореми множення і додавання ймовірностей та їх наслідки	2
13.1. 13.2. 13.3. 13.4.	Умовна ймовірність. Теореми додавання і множення ймовірностей. Наслідки. Формула повної ймовірності. Формули Байєса.	
	Повторні незалежні випробування	-
14.1. 14.2. 14.3. 14.4.	Схема випробувань Бернуллі. Формула Бернуллі. Найімовірніше число появи події. Локальна формула Муавра-Лапласа. Інтегральна формула Муавра-Лапласа. Формула Пуассона. Ймовірність відхилення відносної частоти події від її постійної ймовірності.	

	Дискретні випадкові величини	-
15.1. 15.2. 15.3.	Випадкові величини та їх види. Закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини. Основні розподіли дискретних випадкових величин: рівномірний, біноміальний, Пуассонівський. Числові характеристики дискретних випадкових величин та їх властивості (математичне сподівання, дисперсія, середньоквадратичне відхилення).	
	Неперервні випадкові величини	-
16.1. 16.2. 16.3. 16.4.	Функція розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини і її властивості. Густина розподілу ймовірностей та її властивості. Нормальний закон. Закон рівномірного розподілу. Показниковий закон. Числові характеристики неперервних випадкових величин та їх властивості (математичне сподівання, дисперсія, середньоквадратичне відхилення).	

1.3. Семінарські заняття

Семінарське заняття 1

Тема. Елементи теорії визначників

<u>*Питання для усного опитування та дискусії*</u>

1. Обчислення визначників другого і третього порядків.
2. Використання властивостей визначників для спрощення обчислень.
3. Перетворення визначників за допомогою елементарних операцій.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : визначники другого і третього порядків. Властивості визначників.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

<u>**Визначником (детермінантом) другого порядку**</u> називається вираз

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

<u>**Приклад:**</u> розв'язати методом Крамера систему рівнянь

$$\begin{cases} 7x - 6y = 5 \\ 8x - 7y = -10 \end{cases}$$

Розв'язування.

Маємо: $D = \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = 7\cdot(-7) - 8\cdot(-6) = -1(\neq 0),$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -10 & -7 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-7) - (-6) \cdot (-10) = -95;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 8 & -10 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-10) - 5 \cdot 8 = -110$$

Підставимо значення визначників, одержуємо розв'язок системи :

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{-95}{-1} = 95;$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{-110}{-1} = 110$$

Відповідь: формули (11) дають розв'язок системи (7): $x = 95; y = 110.$

Визначники третього порядку.

<u>Визначником (детермінантом) третього</u> порядку називається вираз

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

<u>Приклад</u>: обчислимо визначник $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$. Користуючись означенням, маємо: $D = 1\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0+4) - 0 + 2(-2-0) = 4 - 4 = 0$.

<u>Приклад</u>.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 7 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} = -55 + 14 = -41$$

(перший рядок множимо на (-2) і додаємо до другого; перший рядок множимо на 3 і додаємо до третього). Завдяки властивостям визначників для обчислення визначника третього порядку нам довелося обчислювати не три, а лише один визначник другого порядку.

Аналогічно тому, як ми ввели означення визначника третього порядку через визначники другого порядку, можна ввести поняття про визначники четвертого порядку через визначники третього порядку:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

Практичне завдання: Для виконання завдання студент обирає варіант згідно наданими йому номером та параметром k .

Обчислити визначники двома способами: а) за допомогою елементарних перетворень;

б) розклавши за елементами рядка (стовпця).

1. $\begin{vmatrix} k & k+1 & k+1 & k-9 \\ 2 & 3 & 0 & k+2 \\ -k & k+2 & -k-1 & 9-k \\ -1 & 2 & k+4 & 1 \end{vmatrix}$;

2. $\begin{vmatrix} k+2 & 1 & 0 & k+3 \\ k-3 & k & 3 & 3-k \\ k+3 & k-2 & 4 & -k-3 \\ k-1 & 2 & k+2 & 1-k \end{vmatrix}$;

3. $\begin{vmatrix} k-2 & 4 & -k & k-1 \\ k & k+2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & -1 & k-2 \\ 2-k & -6 & k & 1-k \end{vmatrix}$;

4. $\begin{vmatrix} k+2 & k & 0 & k+2 \\ k & k+4 & -1 & 4 \\ 5-k & 0 & -3 & 5-k \\ k+3 & 3 & -k & k+3 \end{vmatrix}$;

Семінарське заняття 2

Тема. Основи теорії матриць.

Питання для усного опитування та дискусії

1. Мінори і алгебраїчні доповнення. Розкладання визначника за елементами рядка або стовпця.
2. Види матриць. Елементарні перетворення матриць. Ранг матриці.
3. Добуток матриці. Обернена матриця. Добуток прямокутних матриць.
4. Додавання матриць і множення матриць на число.
5. Матричні рівняння. Обернена матриця

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : визначник, порядок визначника, матриця, додавання матриць, множення матриці на число, добуток матриць, одинична матриця, невироджена матриця, мінор, алгебраїчне доповнення, обернена матриця, математична модель.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Мінором елемента визначника третього порядку, який одержується з даного визначника в результаті викреслювання строчки і стовпчика, на перетині яких стоїть даний елемент.

Наприклад, мінор елемента 5 визначника $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ – це визначник $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -3+6=3$.

Говорять, що **елемент займає парне місце**, якщо сума номерів його стрічки і стовпчика – число парне, і **непарне місце**, якщо сума номерів його сторчки і стовпчика – число непарне.

Наприклад, елемент 5 в попередньому прикладі займає непарне місце, бо знаходиться в 1-ій строчці і в 2-му стовпчику, а 1+2=3 – число непарне.

Алгебраїчним доповненням (мінором із знаком) елемента визначника третього порядку називається мінор цього елемента, взятий із знаком “плюс”, якщо елемент займає парне місце, і із знаком “мінус”, якщо непарне місце.

Приклад, для визначника виду $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ алгебраїчне доповнення елемента a_1 – це число $A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, алгебраїчне доповнення елемента b_3 – це число $B_3 = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ (алгебраїчне доповнення елементів позначаються відповідними великими буквами з тими ж самими індексами).

Якщо елементи визначника представлені як a_{ij} (i – номер строчки, j – номер стовпчика), тобто якщо $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, то, позначивши через M_{ij} мінор елемента a_{ij}, через A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}, маємо:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

(Тут $(-1)^{i+j}$ забезпечує зміну знаків: якщо $i+j$ – число парне, то $(-1)^{i+j} = 1$, а якщо $i+j$ – число непарне, то $(-1)^{i+j} = -1$).

Матриці та дії з ними

Матрицею називається прямокутна таблиця, складена з чисел або з функцій.

Приклад: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix}$.

Цю таблицю записують в круглих або в квадратних дужках (на відміну від визначників). Розміри матриці записують так: $m \times n$, де m – число стрічок, n – число стовпчиків. Так, наведені вище матриці мають відповідно такі розміри: $3 \times 2; 2 \times 3; 2 \times 2$.

Якщо число стрічок матриці дорівнює числу її стовпчиків, то матриця називається квадратною (остання з наведених матриць є квадратною матрицею другого порядку).

Матриця, у якої всього один стовпчик або одна стрічка, називається вектором. Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається нульовою. Квадратна матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю (крім, можливо, елементів, що стоять на головній діагоналі), називається діагональною. Квадратна матриця, у якої всі елементи на головній діагоналі дорівнюють одиниці, а інші – нулю, називається одиничною матрицею і позначається E (або I).

Обернена матриця.

Квадратна матриця називається невиродженою, якщо її визначник відмінний від нуля.

Матриця A^{-1} називається оберненою до матриці A, якщо виконуються умови:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E,$$

де E – одинична матриця.

Можна довести, що будь-яка невироджена матриця має обернену, причому елементами оберненої матриці є алгебраїчні доповнення елементів транспонованої матриці до вихідної матриці A:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Практичне завдання: Знайти A^T , B^2 добутки матриць AB і BA , суму $2A+\frac{1}{2}B$, різницю 3*AB-B та обернену до матиці B.*

1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

4. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$

Семінарське заняття 3

Тема. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Питання для усного опитування та дискусії

1. Поняття про системи лінійних рівнянь. Розв'язок системи лінійних рівнянь.
2. Сумісні і несумісні системи рівнянь. Визначені і невизначені системи лінійних рівнянь.
3. Розв'язування систем рівнянь методом послідовного виключення невідомих (методом Гауса).

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : формули Крамера, прямий хід метода Гаусса, матричний метод, ранг матриці, метод обвідних мінорів, зведення матриці до трапецієвидної форми, теорема Кронекера – Капеллі, сумісність (несумісність) системи рівнянь.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

1. Метод Крамера.

Розглянемо систему трьох лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad (1)$$

Розв'язком системи (1) називається будь-яка трійка чисел $(x;y;z)$, яка задовольняє систему.

Введемо до розгляду визначник системи D , а також визначники Dx, Dy, D_z за формулами:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, Dx = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, Dy = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, Dz = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Якщо $D \neq 0$, то система (1) має єдиний розв'язок, що визначається формулами Крамера:

$$x = \frac{Dx}{D}, y = \frac{Dy}{D}, z = \frac{Dz}{D} \quad (2)$$

(Якщо $D = 0$, то система (1) або несумісна, або має безліч розв’язків)

2. Метод Гаусса.

Існують і інші методи розв’язування систем рівнянь. Покажемо, як розв’язують систему n лінійних рівнянь з n невідомими методом Гаусса. (К. Гаусс, 1777 – 1855 – великий німецький математик); *n>2.*

Проілюструємо метод Гаусса на прикладі, який ми розв’язали методом Крамера. (тут $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$). Перше рівняння системи є зведеним. Проілюструємо прямий хід метода Гаусса за допомогою перетворення таблиці коефіцієнтів вихідної системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 10 \\ 0 & -7 & -6 & -14 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -6 & -14 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Здійснюючи обернений хід, одержуємо: $z = 0$;

$y + 0 = 2$ (отже, $y = 2$);

$x + 2 + 0 = 3$ (отже, $x = 1$).

Обидві відповіді співпали.

3. Розв’язування систем матричним методом.

За допомогою матриць система трьох лінійних неоднорідних рівнянь з трьома невідомими запишеться так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \text{ або}$$

$$AX = B$$

(тут А – матриця виду $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, X – вектор виду $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, B – вектор виду $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$). Припустимо, що $\det A \neq 0$.

Домножимо обидві частини рівняння (1) зліва на A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Оскільки, $A^{-1}A = E, EX = X$, одержуємо:

$$X = A^{-1}B$$

Зауважимо, що метод оберненої матриці (матричний метод) особливо зручний, коли потрібно розв’язати декілька систем рівнянь з однаковими лівими частинами та різними стовпчиками вільних членів – такі системи мають однакову обернену матрицю.

Практичне завдання: розв’язати системи рівнянь наступними методами:

а) за правилом Крамера; б) матричним способом; в) методом Гауса;

1. $\begin{cases} (k-4)x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ kx_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

3. $\begin{cases} -3x_1 + (k+1)x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + kx_2 - x_3 = -7, \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ -x_1 + (k-1)x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + kx_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + (k+10)x_3 = 6, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 = -12. \end{cases}$

Семінарське заняття 4

Тема. Функціональна залежність.

Питання для усного опитування та дискусії

1. Знаходження області визначення та області значень функції.
2. Дослідження основних властивостей функцій (монотонність, парність/непарність, періодичність).
3. Побудова графіків функцій.
4. Знаходження оберненої функції.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є: функція однієї змінної, основні властивості функцій (монотонність, парність/непарність, періодичність, графік функції, обернена функція.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Функція однієї змінної

Якщо кожному значенню змінної x, що належить деякій області, відповідає одне певне значення другої змінної y, то y є функція від x: $y = f(x)$.

Сукупність значень x, для яких визначаються значення функції y в силу правила $f(x)$, називається областю визначення функції.

До основних елементарних функцій відносяться:

1) степенева функція $y = x^{\alpha}$ (α - дійсне число);
2) показникова функція $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$);
3) логарифмічна функція $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$);
4) тригонометричні функції $- y = \sin x, y = \cos x, y = tgx$;
5) обернені тригонометричні функції $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = arctgx, y = arcctgx$.

Елементарною функцією називається функція, яка може бути заданою однією формулою виду $y = f(x)$, де вираз справа складений із основних елементарних функцій і сталих за допомогою скінченого числа операцій додавання, віднімання, множення, ділення і взяття функції від функції.

Алгебраїчною функцією називається будь-яка функція $y = f(x)$, яка задовольняє рівняння виду

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + ... + P_n(x) = 0,$$

де $P_0, P_1, ..., P_n$ – многочлени від x.

До алгебраїчних функцій належать такі елементарні функції:
а) ціла раціональна функція (многочлен)

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n$$

(тут $a_0, a_1, ..., a_n$ – коефіцієнти, n – ціле невід'ємне число – степінь многочлена);
б) дробово-раціональна функція

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + ... + b_m}$$

(тут a_i, b_j – коефіцієнти, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, n та m – цілі невід'ємні числа – степені многочленів у чисельнику і знаменнику);
в) **Ірраціональна функція**: якщо в формулі $y = f(x)$ у правій частинні виконуються операції додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до степеня з раціональними нецілими показниками, то функція $y = f(x)$ називається ірраціональною (наприклад, $y = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt[3]{x}}$).

Функція, яка не є алгебраїчною, називається **трансцендентною** (наприклад, $y = e^{-x}$).

Нескінченно малі та нескінченно великі величини

Перед тим, як перейти до вивчення питання про границю послідовності і границю функції, пригадаємо з лекції що таке нескінченно мала і нескінченно велика величини.

Зазначимо, що з усієї множини змінних величин можна виділити такі, у яких процес зміни відбувається особливим чином.

Означення. Змінна величина x називається нескінченно малою, якщо у процесі її зміни наступить такий момент, починаючи з якого, абсолютна величина змінної x стає і залишається менше будь-якого, як завгодно малого, наперед заданого додатного числа ε, тобто $|x| < \varepsilon$. Зокрема, єдиного нескінченно малою величиною серед сталих величин є величина O.

Нескінченно малі величини, позначають, як правило, буквами грецького алфавіту α, β, γ.

Означення. Змінна величина x називається нескінченно великою, якщо в процесі її зміни наступить такий момент, починаючи з якого, абсолютна величина x стає і залишається більше будь-якого, як завгодно великого, наперед заданого додатного числа N, тобто $|x| > N$.

Наприклад, величина 3^n при необмеженому зростанні n є нескінченно великою величиною.

Постійна величина a називається границею змінної величини x, якщо $|x - a|$ – нескінченно мала величина (тобто $|x - a| < \varepsilon$). Якщо a є границею змінної величини x, то говорять, що x прямує до границі a і позначають:

$$\lim x = a, \text{ або } x \to a.$$

Звідси випливає, що $\lim \alpha = 0$, де α – нескінченно мала величина. Нескінченно велика величина x скінченої границі не має $(\lim x = \pm\infty)$.

Знаходження границі відношення двох нескінченно малих або двох нескінченно великих величин називають розкриттям невизначеності їх відношення.

Семінарське заняття 5
Тема. Основи теорії границь функції

Питання для усного опитування та дискусії

1. Границя функції в точці.
2. Розкриття основних типів невизначеностей.
3. Обчислення границь за допомогою еквівалентних нескінченно малих функцій.
4.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є: границя функції в точці, розкриття основних типів невизначеностей, обчислення границь за допомогою еквівалентних нескінченно малих функцій.

.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Нехай залежна змінна x необмежено наближається до числа x_0 (це означає, що x приймає значення, як завгодно близькі до x_0, але відмінні від x_0): $x \to x_0$.

Число A називається границею функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для всіх значень x, що досить мало відрізняються від числа x_0, відповідні значення функції $f(x)$ як завгодно мало відрізняються від числа A: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Інакше кажучи, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх $x \neq x_0$, які належать δ-околу точки x

$$|x - x_0| < \delta,$$

буде виконуватися нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

то число A є границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$. (Це – означення границі, запропоноване Коші).

Практичне завдання: Знайти границі функції:

Завдання 1. Знайти границю функції.

1. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x - 3}{3 + 7x}$;
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^3 + 3x^2 - x + 3}{7 - x}$;
3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x^2 - 7x + 2}{x^2 + 5x + 6}$;
4. $\lim\limits_{x \to 2} (2x^3 - 7x^2 + 4x + 2)$;

Завдання 2. Знайти границю функції.

1. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-9}{5x+x^2+7}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+2}{\cos x-1}$;
3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{2x-3}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x^2-2x+1}$;

Завдання 3. Знайти границю функції

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2-3-x}{x-1}$;
2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{4x^2-11x-3}{3x^2-8x-3}$;
3. $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^3+64}{x+4}$;
4. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$;

Семінарське заняття 6

Тема. Неперервність функції

Питання для усного опитування та дискусії

1. Неперервність функції однієї змінної.
2. Точки розриву, їх класифікація.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : неперервність функції однієї змінної у точці (на інтервалі), точка розриву першого роду, точка розриву другого роду, точка ліквідного розриву, точка нескінченного розриву.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Функція $y=f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо ця функція визначена в якому-небудь околі цієї точки (включаючи дану точку) і якщо нескінченно мальму приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції. Функція називається неперервною в інтервалі, якщо вона неперервна у всіх точках інтервалу. Геометрично неперервність функції у замкненому інтервалі означає, що графіком функції є суцільна лінія.

Якщо для функції $y=f(x)$ умова неперервності в точці x_0 порушена, то ця точка називається точкою розриву функції. Точка розриву функції називається точкою розриву першого роду, якщо у цій точці функція має ліву і праву скінченні границі. Якщо, зокрема, ці границі рівні між собою, але функція $f(x)$ при $x=x_0$ не визначена (або визначена, проте не рівна цим границям), то x_0 називають точкою ліквідовного розриву. Всі точки розриву, які не є точками розриву першого роду, називаються точками розриву другого роду (це, зокрема, точки нескінченного розриву).

Мають місце так звані **перша і друга "чудові" границі:**

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$$ (перша "чудова" границя);

$$\lim_{\alpha\to\infty}(1+\frac{1}{\alpha})^{\alpha}\,\varepsilon$$ (друга "чудова" границя);

Так наприклад, за допомогою першої "чудової" границі знаходимо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\lim_{x\to 0}k\frac{\sin kx}{kx}=k\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}=k\cdot 1=1.$$

За допомогою другої "чудової" границі знаходимо:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^{n}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^{\frac{n}{k}\cdot k}=\varepsilon^{k}.$$

Практичне завдання: Знайти границі функції:

1. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{5}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x}{1+5x}\right)^{x}$. 2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sin 3x}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n-1}\right)^{-2n}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{tg\ 3(x-\pi)}{\sin\ 2(\pi-x)}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x-2}\right)^{x}$. 4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 3x\cdot ctg 5x$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{3}{\cos x}}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 ctg\ 2x^2}{\cos 3x}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{5n}\right)^{n}$. 6. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\ 2x^2}{\sin\ 3x^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{arc\sin 6x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+1}\right)^{3x}$. 8. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arc\,tg\,3x}{5x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x}\right)^{x/2}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{\sin 5\pi x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+1}\right)^{5x}$. 10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{arc\,tg\,4x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-2}\right)^{3x}$.

Семінарське заняття 7
Тема. Похідна функції

<u>*Питання для усного опитування та дискусії*</u>

1. Похідна функції однієї змінної, її геометричний, економічний зміст.
2. Таблиця похідних.
3. Правила диференціювання.
4. Диференціювання складної, наявної, оберненої функції.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : похідна, геометричний зміст похідної, економічний зміст таблиця похідних, правила диференціювання.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Похідна, її геометричний та економічний зміст.

Нехай ми маємо функцію $y = f(x)$, визначену в деякому проміжку. Знайдемо приріст функції в точці x:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x),$$

складемо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ та знайдемо $\lim\limits_{\Delta x\to x}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (якщо ця границя існує).

<u>Похідною</u> функції $y = f(x)$ по аргументу x називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Похідну позначають так: $f'(x)$; y_x.; $\dfrac{dy}{dx}$

Операція знаходження похідної від функції $f(x)$ називається <u>**диференціюванням**</u> цієї функції.

Дамо **економічну інтерпретацію** похідної.

Нехай витрати виробництва k є функцією обсягу продукції x.

Границю $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta k}{\Delta x} = k'(x)$ називають <u>граничними витратами виробництва</u>. Нехай, наприклад, функція витрат $k(x)$ має вигляд:

$$k(x) = 400x - 0{,}01x^2$$

Знайдемо $k'(x)$:

$$k'(x) = 400 - 0{,}02x.$$

Оскільки реальний економічний зміст x мають лише цілі x, то можна написати наближену рівність:

$$k(x+1) - k(x) = k'(x),\ \Delta x = 1.$$

Таким чином, функція $k'(x)$ показує, наскільки зміняться витрати при збільшенні виробництва на одиницю. Наприклад, $k'(50) = 400 - 0.02\cdot 50 = 399$. Це означає, що при збільшенні обсягу виробництва з 50 до 51 одиниці витрати виробництва зростуть на 399 одиниць.

Похідні від елементарних функцій.
Правила диференціювання (теореми про сталий множник, про похідну суми, добутку і частки)

Користуючись означенням похідної, можна знайти похідні від таких елементарних функцій.

1) $y = C$ (C – стале число). Покажемо, що $C' = 0$: $\Delta y = C - C = 0$; $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. (Студентам рекомендується дати геометричне тлумачення цього факту).

2) $y = \sin x$. Покажемо, що $y' = \cos x$. Маємо: $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$.

3) Знаходимо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = 2\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x + \Delta x)}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x$

(ми скористалися першою “чудовою” границею).

При знаходженні похідних елементарних функцій користуються теоремами про сталий множник, про похідну суми, добутку і частки.

Диференціювання складної, наявної, оберненої функції

а) Має місце така теорема про диференціювання складної функції.

Теорема. Якщо функція $u = \varphi(x)$ має в деякій точці похідну $u'_x = \varphi'(x)$, а функція $y = F(u)$ має при відповідному значенні u похідну $F'(u) = y'_u$, тоді складна функція $y = F(\varphi(x))$ у вказаній точці x теж має похідну, яка дорівнює $y'_x = y'_u u'_x$.

Приклад. Знайти похідну функції $y = \ln\sin x$. Тут $y = \ln u$, де $u = \sin x$. Маємо:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{1}{u}\cdot\cos x = \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x = ctgx$$

Аналогічно, якщо $y = F(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x)$, то $y'_x = y'_u u'_v v'_x$.

Приклад. Знайти похідну функції $y = \sin^2 x^{\frac{1}{3}}$. Тут $y = u^2$, де $u = \sin v$, причому $v = x^{\frac{1}{3}}$. Маємо: $y_x = 2\sin x^{\frac{1}{3}}\cos x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = \frac{1}{3^3\sqrt{x^2}}\sin 2^3\sqrt{x}$.

Таблиця основних формул диференціювання

Наведемо таблицю основних формул диференціювання.

Функція	Її похідна	Функція	Її похідна
c	0	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

x^n	nx^{n-1}	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sin x$	$\cos x$	$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cos x$	$-\sin x$	$arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}$
tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$	a^x	$a^x \ln a$
$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}\left(=\frac{\log_a e}{x}\right)$ (зокрема, $\frac{1}{x}$ при $a=e$)

Практичне завдання: Знайти похідні функцій.

1. а) $y=2ktg\sqrt{x}-kx^3$; б) $y=\ln\frac{k+3x}{k-2x}$; в) $y=(kx^4-3x+4)^{k+2}$; г) $y=arctg\,\frac{k}{x}$; д) $y=e^{2x}\cos\frac{2x}{3k}$.

2. а) $y=arc\sin e^{3xk}$; б) $y=\ln\frac{ktgx+1}{tgx-2}$; в) $y=x^{2k}e^{x^3}$; г) $y=(x^5-kx^3+3)^{k+3}$; д) $y=\sin\frac{x}{k}e^{kx^2}$.

3. а) $y=tgx\cdot\cos 3kx$; б) $y=\ln\frac{k+x^2}{x^{2k}-1}$; в) $y=(x^6-kx^4+3x+5)^{2k}$; г) $y=\frac{1}{x}arctgkx^5$;
д) $y=\sin\sqrt[3]{x+2k}$.

4. а) $y=\frac{\cos^2 x}{k+\cos x}$; б) $y=(kx^5-4x^2+3)^{3k}$; в) $y=\sqrt{x+k}\cdot tg\,2kx$; г) $y=arctg\,\frac{5x+2}{k+3}$; д) $y=3^{kx}\cdot\ln\frac{4x+k}{4x-k}$.

5. а) $y=(2+kx)tg\,2x$; б) $y=arctg\frac{x+2k}{3x-k}$; в) $y=\ln\frac{x^2+3kx}{x+k}$; г) $y=(kx^4-2kx^3+5)^3$;
д) $y=e^{2x}(\sin kx+2k\cos x)$.

Семінарське заняття 8
Тема. Диференціал функції

<u>Питання для усного опитування та дискусії</u>

1. Знаходження диференціала функції.
2. Використання диференціала для наближених обчислень.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : диференціал функції однієї змінної, застосування диференціала до наближених обчислень.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Нехай функція $y=f(x)$ диференційовна на деякому проміжку, тобто для будь-якої точки x з цього проміжку границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$ існує і дорівнює скінченному числу.

Враховуючи взаємозв'язок змінної величини, що має скінченну границю, і нескінченної малої величини, можемо записати $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$, де α — нескінченно мала величина ($\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$).

Помноживши всі члени останньої рівності на Δx, дістанемо

$$\Delta y = f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x.$$

Отже, приріст функції Δy є сумою двох доданків, з яких перший доданок — *головна лінійна частина приросту*, другий доданок — добуток $\alpha\Delta x$, який є н.м.в. вищого порядку, ніж Δx.

Означення. Добуток $f'(x)\Delta x$ називається *диференціалом функції* $y = f(x)$; його позначають символом dy, тобто $dy = f'(x)\Delta x$

Знайдемо диференціал функції $y = x$; для цього випадку $y'=(x)'=1$, отже, $dy=dx=\Delta x$. Таким чином, диференціал незалежної змінної збігається з її приростом Δx. Тому формулу для диференціала можна записати так: $dy=f'(x)dx$.

Приклад. Знайти диференціал dy функції $y=x^2$: 1) при довільних значеннях x та Δx; 2) при $x = 20$, $\Delta x = 0{,}1$.

Розв'язання. 1) $dy=\left(x^2\right)'\Delta x=2x\Delta x$;

2) якщо $x = 20$, $\Delta x = 0{,}1$, то $dy=2\cdot 20\cdot 0{,}1=4$.

Застосування диференціала в наближених обчисленнях

Вираз Δy можна записати так: $\Delta y = dy+\alpha\Delta x$.

Якщо $f'(x)\neq 0$, то величина $\alpha\Delta x$ є малою вищого порядку порівняно з dy.

При малих Δx доданком $\alpha\Delta x$ нехтуємо і використовуємо наближену рівність $\Delta y\approx dy$, або $f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x$, звідки $f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$. Остання наближена рівність тим точніша, чим менше Δx.

Приклад. Обчислити наближено $\sqrt{27}$.

Розв'язання. Перетворимо вираз, що стоїть під знаком кореня:

$27=25+2=25\left(1+\frac{2}{25}\right)$, звідки $\sqrt{27}=\sqrt{25\left(1+\frac{2}{25}\right)}=5\sqrt{1+\frac{2}{25}}$.

При обчисленні $\sqrt{1+\frac{2}{25}}$ розглянемо функцію $f(x)=\sqrt{x}$, тоді $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

У нашому випадку формула запишеться так:

$$\sqrt{x+\Delta x}\approx\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x,\text{ де } x=1, \Delta x=\frac{2}{25}.$$

Дістанемо: $\sqrt{1+\frac{2}{25}}\approx\sqrt{1}+\frac{1}{2\sqrt{1}}\frac{2}{25}=1+\frac{1}{25}=1{,}04$.

Підставивши (7.7) у рівність (7.6), дістанемо

$$\sqrt{27}\approx 5\cdot 1{,}04=5{,}2.$$

Правила знаходження диференціала

1. $y = c$; $dy = 0$;
2. $y=uv,\ dy=udv+vdu$;
3. $y=u+v,\ dy=du+dv$;
4. $y=\frac{u}{v},\ dy=\frac{vdu-udv}{v^2}$.

Теорема. Форма диференціала не залежить від того, чи є аргумент незалежною змінною або функцією.

Приклад. Знайти диференціал функції $y=\mathrm{arctg}x$.

Маємо: $dy=(\mathrm{arctg}x)'dx=\frac{dx}{1+x^2}$.

Приклад. Обчислити наближено значення $\arcsin 0{,}51$.

Розглянемо функцію $y = \arcsin x$. Візьмемо x = 0,5, Δx = 0,01 та, застосовуючи формулу $\arcsin(x + \Delta x) \approx \arcsin x + (\arcsin x)' \Delta x$, одержимо

$$\arcsin 0{,}51 \approx \arcsin 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}} \cdot 0{,}01 = \frac{\pi}{6} + 0{,}011 = 0{,}513.$$

Семінарське заняття 9

Тема. Застосування похідної до дослідження функції

Питання для усного опитування та дискусії

1. Правила Лопіталя.
2. Дослідження функції однієї змінної на монотонність, екстремум і на напрямок вигнутості.
3. Асимптоти графіка функції.
4. Загальна схема побудови графіка функції.
5. Застосування похідної в економіці.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є: перше правило Лопіталя, друге правило Лопіталя, вертикальна асимптота, похила асимптота, монотонне зростання, монотонне спадання, екстремум (мінімум, максимум), вгнутість, увігнутість, точка перегину.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Правило Лопіталя

Наведемо правило Лопіталля граничного переходу, яким зручно користуватися при дослідженні функцій.

Правило Лопіталя. Нехай функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ при $x \to x_0$ (або $x \to \infty$) сумісно прямують до нуля або до нескінченності. Якщо відношення їх похідних має границю скінченну чи ні, то і відношення самих функцій також має границю, яка дорівнює границі відношення похідних:

$$\underset{x \to x_0}{\text{дшь}} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}, \ \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\varepsilon(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{\varepsilon'(x)}.$$

Приклад, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x'}{(e^x)'} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{e^x} = 0.$

Деколи цим правилом доводиться користуватися декілька разів.

Загальна схема дослідження функцій

Можна рекомендувати таку схему дослідження функцій

1) Знайти область визначення функції її точки розриву.
2) Вияснити питання про парність, періодичність, характерні точки функції.
3) Визначити інтервали знакосталості та монотонності функції.

4) Знайти екстремуми функції.
5) Дослідити функцію на вигнутімть і увігнутість.
6) Знайти вертикальні і похилі графіка функцій (якщо вони існують)
7) На основі одержаної інформації побудувати графік функцій.

Зауважимо, що окремі пункти цієї схеми можна переставляти місцями. Можна також проводити додаткове дослідження в залежності від функції – наприклад, шукати lim*f(x)* і т.п.

Завдання біля дошки: Провести повне дослідження та побудувати графік функцій

$$y = \frac{x^3}{2 - x^3}.$$

Об'єднаючи одержану інформацію, будужмо графік функції $y = \frac{x^3}{2 - x^2}$ (рис.1)

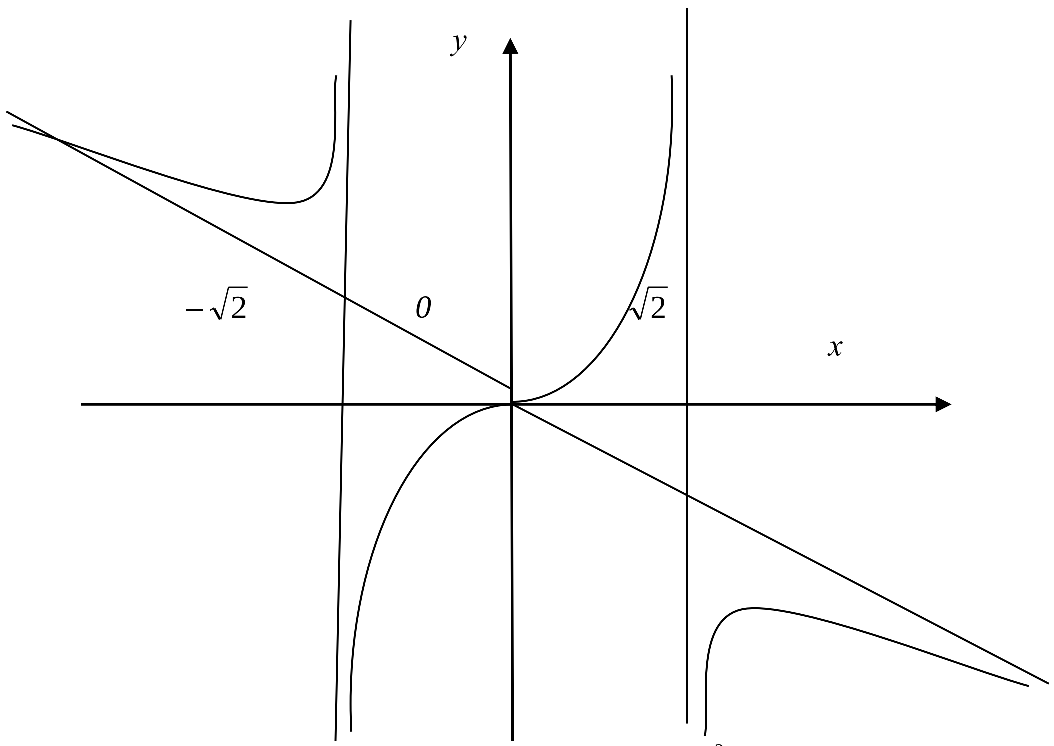


Рис.1.Графік функції $y = \frac{x^3}{2 - x^2}$

Застосування похідної в економіці

У практиці економічних досліджень широке застосування одержали *виробничі функції*, які використовуються для виявлення залежностей випуску продукції від витрат ресурсів, при прогнозуванні розвитку галузей, при розв'язуванні оптимізаційних задач. Наприклад, якщо виробнича функція $y = f(x)$ встановлює залежність випуску продукції y від витрат ресурсу x, то $f'(x)$ називають *граничним продуктом*; якщо ж $y = f(x)$ встановлює залежність витрат виробництва y від об'єму продукції x, то $f'(x)$ називають *граничними витратами*.

Для вивчення відносної зміни приросту функції $y = f(x)$ при малих відносних змінах приросту аргументу x використовують *коефіцієнт еластичності функції* (або *еластичність*).

Нехай задана функція $y = f(x)$, а Δx і Δy – прирости незалежної і залежної змінної, причому $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Відносний приріст залежної змінної – це вираз виду $\frac{\Delta y}{y}$.

Відношення відносно приросту функції до відносного приросту незалежної змінної $\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}$ показує, у скільки разів відносний приріст функції більший за відносний приріст незалежної змінної. Представимо його у формі:

$$\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}.$$

Якщо функція *y=f(x)*диференційована, то

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}\right)=f'(x)\frac{x}{y}$$

.

Границя відношення відносного приросту функції $y=f(x)$ до відносного приросту незалежної змінної, коли $\Delta x\to 0$, називається *еластичністю функції* $y=f(x)$ *відносно змінної* x.

Еластичність функції $y=f(x)$ позначимо символом $E_x(y)$:

$$E_x(y)=\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Еластичність функції допускає таку економічну інтерпретацію: еластичність – це наближений процентний приріст функції, що відповідає приросту незалежної змінної на 1%.

$$y=-0{,}14+1{,}37x.$$

Семінарське заняття 10

Тема. Невизначений інтеграл

Питання для усного опитування та дискусії

1. Задача інтегрального числення. Первісна.
2. Невизначений інтеграл, його властивості. Таблиця інтегралів.
3. Заміна змінних та інтегрування частинами у невизначеному інтегралі.

Методичні вказівки

***Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є*:** первісна, інтеграл, таблиця інтегралів, безпосереднє інтегрування, метод підстановки (заміни змінних), інтегрування частинами.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Невизначений інтеграл

Первісна функція. невизначений інтеграл.

Основна задача диференціального числення – це знаходження похідної або диференціала заданої функції. Сформулюємо обернену задачу по заданій похідній або диференціалу деякої невідомої функції потрібно знайти цю функцію. Інакше кажучи, маючи $dF(x)=f(x)dx$ або $F'(x)=f(x)$, потрібно знайти невідому функцію $F(x)$. Це – основна задача інтегрального числення.

Первісною функцією для даної функції $f(x)$ на даному проміжку називається така функція $F(x)$, похідна якої дорівнює $f(x)$ або диференціал якої дорівнює $f(x)dx$ на розглядуваному проміжку.

Основні властивості невизначеного інтеграла.

Враховуючи означення невизначеного інтеграла

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

можна легко довести основні його властивості

1) Диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу, а похідна – підінтегральній функції:

$$\underline{d\int f(x)dx = f(x)dx,}\quad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2) Невизначений інтеграл від диференціала неперервно диференційованої функції дорівнює самій цій функції з точністю до сталого доданка:

$$\underline{\int d\varphi(x) = \int \varphi'(x)dx = \varphi(x) + c.}$$

Зауважимо, що в підкреслених виразах знаки d і $\int$ взаємно знищують один одного. В цьому розумінні, як вже згадувалося, диференціювання та інтегрування є <u>взаємно оберненими</u> математичними операціями.

3) Відмінний від нуля сталий множник можна виносити за знак невизначеного інтеграла:

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx.$$

Дійсно: $A\int f(x)dx = A(F(x)+c) = AF(x) + c_1 \quad (c_1 = AC)$.

При цьому $AF(x)$ – первісна для Af, оскільки $(AF)' = AF' = Af$.

4) Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченого числа неперервних функцій дорівнює такій же алгебраїчній сумі невизначених інтегралів цих функцій.

Таблиця найпростіших інтегралів.

Безпосереднім диференціюванням перевіряється справедливість наступних табличних формул.

1. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c \quad (m \neq -1)$.
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c \quad (x \neq 0)$.
3. $\int e^x dx = e^x + c.$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0, a \neq 1)$.
5. $\int \cos x dx = \sin x + c.$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + c.$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c.$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c.$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c.$
10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c.$
11. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c.$
12. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1} + c.\right|$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+\alpha}\right| + c \quad (\alpha \neq 0)$.
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c.$
15. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c.$
16. $\int \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c.$
17. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c.$

Інтегрування методом заміни змінної (способом підстановки) та частинами.

Існує два основних методи інтегрування – метод заміни змінних (спосіб підстановки) а) та метод інтегрування по частинах б).

а) Нехай потрібно знайти $\int f(x)dx$, який не є табличним інтегралом (але відомо, що існує). Виконаємо в підінтегральному виразі заміну: $x=\varphi(t)$ (тут $\varphi(t)$ та $\varphi'(t)$ – неперервні функції, причому існує обернена функція $\varphi^{-1}(t)$).

<u>б) Формула інтегрування частинами:</u> $\int udv = uv - \int vdu.$

<u>Наприклад.</u>

№1. $\int x\sin xdx = \begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\sin xdx & v=-\cos x \end{vmatrix} = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + c.$

№2. $\int \ln xdx = \begin{vmatrix} u=\ln x & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=dx & v=x \end{vmatrix} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c.$

Практичне завдання:

І. Методи інтегрування

Завдання 1. Безпосереднє інтегрування

$\int x^3\sqrt[4]{x^5}\,dx =$

$\int (5\sin x - 3\cdot 4^x + \frac{1}{x})dx =$

$\int (2x-5)(x+1)dx$

Завдання 2.

Метод підстановки (метод заміни змінної)

$\int_0^1 (2x^3-1)x^2dx$

$\int (2x-5)^3dx$

$\int e^{x^2-2}dx$

Завдання 3.

Метод інтегрування частинами

$\int x^2\sin 5xdx$

$\int (x\ \ -1)\sin(2x-1)dx$

$\int (2x^2-3x+2)e^{2x}dx =$

Семінарське заняття 11

Тема. Визначений інтеграл

<u>Питання для усного опитування та дискусії</u>

1. Визначений інтеграл (означення, властивості, методи обчислення).
2. Формула Ньютона-Лейбніца.
3. Застосування інтегралів.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : інтегральна сума, визначений інтеграл, геометрична інтерпретація визначеного інтеграла, заміна змінних у визначеному інтегралі, інтегрування частинами у визначеному інтегралі, обчислення площ, об'ємів, довжини дуги за допомогою інтегралів.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах:

Визначений інтеграл.

Якщо при будь-якому діленні відрізка $[a;b]$ такому, що $\max\limits_i \Delta x_i \to 0$ і при довільному виборі точок ξ_i сума $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ прямує до однієї й тієї ж самої границі I , то говорять, що функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a;b]$, а границю I називають визначеним інтегралом від $f(x)$ на $[a;b]$ і позначають $\int\limits_a^b f(x)dx$::

$$\lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Число a називають нижньою межею інтеграла, ab – його верхньою межею. Проміжок $[a;b]$ називають відрізком інтегрування, а x – змінною інтегрування.

Властивості визначеного інтеграла.

Визначений інтеграл має властивості, які можна сформулювати за допомогою знаків рівностей або нерівностей.

1) Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx.$$

Дійсно, $\int\limits_a^b Af(x)dx = \lim\limits_{\max\limits_i Dx_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} Af(\xi_i)\Delta x_i =$

$$= A \lim_{\max\limits_i Dx_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = A\int_a^b f(x)dx$$

2) Визначений інтеграл від алгебраїчної суми кількох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від доданків.

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

Це дійсно так, оскільки

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} (f_1(\xi_i) + f_2(\xi_1))\Delta x_i = \lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i \right) =$$

$$= \lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\max \Delta x_i \to 0} f_2(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

Формула Ньютона-Лейбніца.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Дійсно, якщо $F(x)$ – яка-небудь первісна від неперервної функції $f(x)$, то, оскільки $\int\limits_a^x f(t)dt$ – також її первісна, маємо:

$\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) + c^*$, де c^* – стала.

Для визначення цієї сталої покладемо в останній рівності $x = a$:

$\int\limits_a^a f(t)dt = F(x) + c^*$, або $O = F(a) + c^*$. Звідси одержуємо: $c^* = -F(a)$. Таким чином, $\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$. . Підставивши $x = b$, одержуємо формулу Ньютона-Лейбніца, яка встановлює зв'язок між визначеним та невизначеним інтегралами. Цю формулу записують ще так:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b .$$

Для обчислення інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$, де $f(x) \in C[a;b]$, можна ввести нову змінну t за формулою: $x = \varphi(t)$. Якщо:

а) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$;

б) $\varphi(t), \varphi'(t)$ неперервні при $t \in [\alpha;\beta]$;

в) $f(\varphi(t))$ – визначена і неперервна функція на відрізку $[\alpha;\beta]$, то має місце формула:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt .$$

<u>**Приклад**</u>. $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x}dx = \begin{vmatrix} 1+x=t^2 & x=0 & t=1 \\ dx = 2tdt & x=1 & t=\sqrt{2} \end{vmatrix} = \int\limits_1^{\sqrt{2}} t - 2tdt = 2\int\limits_1^{\sqrt{2}} t^2dt = \frac{2}{3}t^2\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$

При потребі користуються формулою інтегрування по частинах:

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$$

<u>**Приклад.**</u> $\int\limits_o^{e-1} \ln(x+1)dx = \begin{vmatrix} u = \ln(x+1) & du = \dfrac{dx}{x+1} \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} = x\ln(x+1)\Big|_o^{e-1} - \int\limits_o^{e-1} \frac{xdx}{x+1} = (e-1)\ln(e-1+1) -$

$-0 - \int\limits_o^{e-1} \frac{(x+1)-1}{x+1}dx = e-1-\int\limits_o^{e-1} dx + \int\limits_o^{e-1} \frac{d(x+1)}{x+1} = e-1-x\Big|_0^{e-1} + \ln|x+1|\Big|_0^{e-1} = e-1-(e-1)+\ln(e-1+1) -$

$-\ln 1 = e-1-e+1+1 = 1.$

Економічне застосування інтеграла.

Визначений інтеграл має широке використання в економічних розрахунках. За допомогою визначеного інтеграла можна визначати загальний дохід, якщо відомий граничний прибуток. Нехай, наприклад, функція граничного доходу задається формулою

$$MR = -0.04x + 12,$$

де x – кількість поданих одиниць товару. Визначимо дохід від продажу 100 одиниць товару.

Розв'язання.

$$M = \int_0^{100}(-0.04x+12)dx = \left(-0.04\frac{x^2}{2}+12x\right)\Big|_0^{100} = \left(-0.02x^2+12x\right)\Big|_0^{100} = 1000 \text{ (грн.)}$$

Визначений інтеграл дозволяє розв'язувати задачу визначення додаткової вартості. Нехай задано функції пропозиції $S = 15p$ та попиту $q = p^2 - 80p + 1500$. (рис. 3).

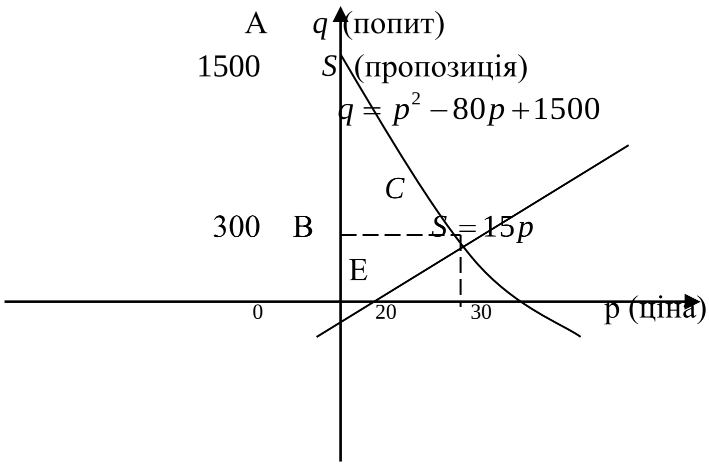


Рис. 3.

Задача про додаткову вартість.

Визначаємо, що $q = S$ при $p = 20$. При цьому попит дорівнює 300 одиниць. Дохід за продану продукцію становить для виробника 20*300=6000 грн та зображується площею прямокутника $OBCE$. Економічний зміст має ціна за одиницю товару, більша за 20 грн (якщо попит перевищує пропозицію, то, звичайно, знайдуться покупці, які куплять товар дорожче, ніж за 20 грн). мірою справжньої корисності товару, вважають економісти, є площа фігури $OBCD$. Площа заштрихованої фігури (криволінійного трикутника CDE) називається додатковою вартістю. Визначимо цю площу за допомогою інтегралу

$$\int_{20}^{30}\left(p^2 - 80p + 1500\right)dp = \left(\frac{p^3}{3} - 80\frac{p^2}{2} + 1500p\right)\Bigg|_{20}^{30} = 1333.33 \text{ грн.}$$

Отже, додаткова вартість дорівнює 1333,33 грн.

Приклад. Для подолання наслідків стихійного лиха в деяку місцевість надходять благодійні внески, розмір яких наближено описується функцією $a(t) = 30e^t \left(t \in [0;3]\right)$, причому t вимірюється в днях від моменту стихійного лиха, а $a(t)$ – в тисячах гривень. Визначити:

a) скільки внесків надійде на другий день $(t = 2)$?

b) яка сума внесків очікується за три дні з моменту початку стихійного лиха?

Розв'язання.

а) Визначимо $a(2)$:

$$a(2) = 30e^2 \approx 221.6 \text{ тис. грн.}$$

б) Сумарні внески за три дні визначимо за допомогою визначеного інтеграла:

$$\int_0^3 30e^t dt = 30e^t\Big|_0^3 = 30\left(e^3 - 1\right) \approx 572.4 \text{ тис. грн.}$$

Аналогічно розв'язуються задачі про епідеміологічний контроль, про потребу підприємства в матеріалах, про рівень затрат та ремонт приладів, про чисельність населення та ін.

Нехай виробнича функція Кобба-Дугласа має вигляд:

$$y = (4+t)e^{2t}, t \in [0;3]$$

(y – об’єм випуску продукції (тис. шт.), t – час (роки)). Потрібно знайти об’єм Ω продукції, виготовленої за 3 роки.

Розв'язання.

Об’єм Ω виготовленої продукції дорівнює визначеному інтегралу

$$\Omega = \int_0^3 (4+t)e^{2t}dt .$$

Інтегруючи частинами, знаходимо:

$$\Omega = \begin{vmatrix} u = u + t & du = dt \\ dv = e^{2t}dt & v = \frac{1}{2}e^{2t} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(4+t)e^{2t}\Big|_0^3 - \frac{1}{2}\int_0^3 e^{2t}dt = \frac{7}{2}e^6 - 2 - \frac{1}{4}\left(e^6 - 1\right) = \frac{13}{4}e^6 - \frac{7}{4} \approx 11309$$ (тис. шт.)

Отже, за 3 роки буде виготовлено приблизно 1309 тис. шт. одиниць продукції.

За допомогою кривої Лоренцо OBA (рис. 4), що відображає залежність долі прибутків від долі населення, оцінюють нерівномірність в розподілі прибутків населення (якщо розподіл прибутків рівномірний, то крива Лоренца вироджується в пряму OA).

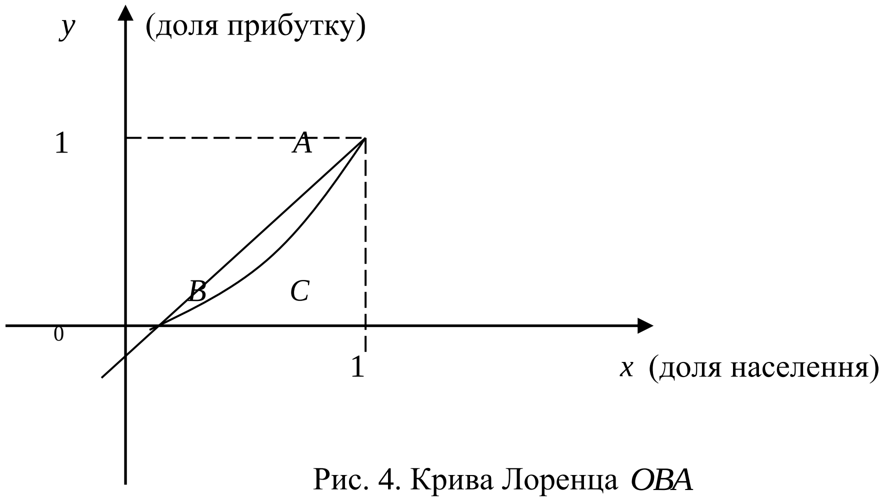


Рис. 4. Крива Лоренца OBA

Мірою цієї нерівномірності є коефіцієнт Джіні k : $k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta JAB}}$, де S_{OAB} – площа OBA, а $S_{\Delta OAB}$ – площа трикутника OAC. При цьому чим більше k, тим нерівномірніший розподіл прибутків населення.

Нехай, наприклад, $y = x^4$. Тоді $S_{OAB} = \frac{1}{2} - \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{2} - \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = 0.3$. Оскільки $S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}$, то $k = 0{,}6$. Розподіл прибутків населення істотно нерівномірний. Якщо ж $y = \frac{x^2 + 2x^3}{3}$, то аналогічно можна показати, що $k = \frac{4}{9} \approx 0{,}44$. В цьому випадку розподіл прибутків у меншій мірі нерівномірний.

Семінарське заняття 12

Тема. Основні поняття теорії імовірностей

<u>Питання для усного опитування та дискусії</u>

1. Скінчені множини. Елементи комбінаторики.
2. Основні поняття комбінаторного аналізу.

3. Перестановки, розміщення, комбінації з повтореннями.
4. Класичне та статистичне визначення ймовірності.
5. Основні властивості ймовірності.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : перестановки, розміщення, комбінації, класичне та статистичне визначення ймовірності, основні властивості ймовірності.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Пригадаємо основні правила за якими виконують вибір тієї чи іншої комбінаторної формули в обчисленнях. Вам необхідно їх вивчити, щоб вільно застосовувати на практиці та не тлумачити як захочеться формули розміщень, перестановки та комбінації.

Елементи комбінаторики

Відомо два базових правила, за якими приймають рішення: якою формулою комбінаторики слід користуватися?

Чи це будуть комбінації, перестановки чи розміщення залежить від відповіді на два питання.

1) Чи враховується порядок розміщення елементів?

Якщо відповідь «ні» то застосовуємо формулу комбінацій.

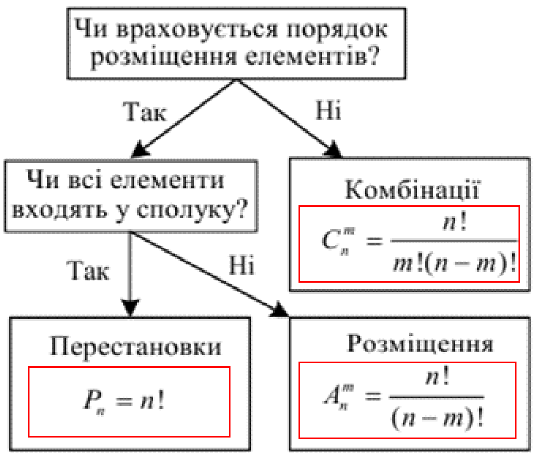
Якщо «так», то маємо два варіанти, які залежать від відповіді на наступне питання:

2) Чи всі елементи входять у сполуку?

Якщо «так» то обчислюємо через перестановки, якщо «ні» застосовуємо формулу розміщень.

Щоб легше запам'ятались ці правила наведемо наступний рисунок, вивчивши який у Вас не виникатиме труднощів з основними комбінаторними задачами.

Вибір формули для обчислення кількості сполук



Правила комбінаторного додавання та комбінаторного множення

Правило комбінаторного множення є частковим випадком основного правила комбінаторики: Нехай необхідно виконати послідовно n дій. При цьому першу дію можна виконати k1 способами, другу — k2 способами і так далі до m-ї дії, яку можна виконати km способами. Тоді всі m дій можна виконати k1 • k2 • ... • km1 • km2 • ... • km способами.

Варіант 1

1. Скількома способами можна вибрати 4 яблука із 10? *(3 бали)*
2. Скількома способами можна розподілити 3 різних путівки між 25 учнями? *(3 бали)*
3. Скількома способами можна сформувати поїзд з 8 вагонів? *(3 бали)*
4. Обчисліть: $C_6^4 + C_6^5 + C_6^6$.

Варіант 2

1. Скількома способами можна розподілити 3 однакових путівки між 25 учнями? *(3 бали)*

2. У класі навчається 10 юнаків. Скількома способами можна їх вишикувати у шеренгу?

3. Скількома способами із 20 студентів групи можна обрати голову, заступника голови і секретаря зборів?

4. Обчисліть: $C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$.

Відповіді: **1.** C_{10}^4 = 219. **2.** A_{25}^3 = 13 800. **3.** P_8 - 8! = 40 320. **4.** 22.

1. C_{25}^3 = 2300. **2.** P_{10} = 10! = 3 628 800. **3.** A_{20}^3 = 6840. **4.** 16.

Визначте вид сполуки, про яку йдеться мова в задачі, та запишіть відповідну формулу:

1. а) 25 викладачів потиснули один одному руки перед конференціє.. Скільки було зроблено рукостискань?
   б) 25 студентів обмінялися фотографіями так, що кожний обмінявся з кожним. Скільки було роздано фотографій?

   Відповіді: а) C_{25}^2 = 300; б) A_{25}^2 = 600.
2. а) У групі з 32 студентів вибирають делегацію на конференцію, яка складається з трьох осіб. Скільки існує варіантів такого вибору?
   б) У класі з 25 студентів для проведення зборів обирають голову, заступника і секретаря. Скількома способами це можна зробити?

   Відповіді: а) C_{32}^2 = 4960; б) A_{12}^2 = 29 760.
3. а) Біля стола стоїть 9 стільців. Скільки існує способів розміщення за столом 9 осіб?
   б) 9 дівчат водять хоровод. Скільки існує для них різних варіантів стати в коло?
   в) З дев'яти різних намистин потрібно зробити намисто. Скільки існує різних способів його утворення?

Відповіді: а) P_9 = 9!; б) $\frac{P_9}{9}$ (кількість хороводів у 9 раз менша від P_9, бо циклічні перестановки не змінюють хоровод); в) $\frac{P_9}{9 \cdot 2}$ (циклічні перестановки не змінюють намисто, а також намисто не зміниться, якщо перевернути його).

Задача. У групі12 хлопців і 10 дівчат.

а) Скількома способами можна вибрати одного сутдента цього класу?
б) Скількома способам двох — хлопця і дівчину?
в) Скількома способами можна вибрати дівчину?
г) Уже вибрано одного студента. Скількома способами можна вибрати після цього хлопця і дівчину?

Задачі:

1. 7 книг різних авторів і трьохтомник одного автора розташовані на книжковій полиці. Скількома способами можна розставити ці 10 книжок на полиці так, щоб книги автора трьохтомника стояли поруч?

Відповідь: $P_3 \cdot P_8$ = 241 920.

2. Збори з 30 осіб обирають голову, секретаря та трьох членів редакційної комісії. Скількома способами це можна зробити?

Відповідь: $A_{30}^2 \cdot C_{28}^3$ = 2 850 120.

3. У підрозділі 60 солдат і 5 офіцерів. Скількома способами можна виділити наряд, який складається із трьох солдат і одного офіцера?

Відповідь: $C_{60}^{3} \cdot C_{5}^{1} = 171100$.

4. Із 10 троянд і 8 жоржин треба скласти букет так, щоб в ньому були 2 троянди і 3 жоржини. Скількома способами можна скласти букет?

Відповідь: $C_{10}^{2} \cdot C_{8}^{3} = 2520$.

5. Із семи бігунів і трьох стрибунів треба скласти команду із 5 чоловік, в яку б входив хоч би один стрибун. Скількома способами це можна зробити?

Відповідь: $C_7^4\, C_3^1 + C_7^3\, C_3^2 + C_7^2\, C_3^3 = 231$.

Ймовірністю випадкової події називається відношення кількості елементарних подій, що сприяють цій події до загальної кількості подій простору елементарних подій.

Властивості ймовірностей

$\mathbf{0} \le P(A) \le \mathbf{1}$ для кожної випадкової події А.

P(A) = 1 для кожної вірогідної події А.

P(Ā) = 0 для неможливої події.

Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює 1.

P(A) + P(Ā) = 1; $p + q = 1$.

Для ймовірності випадкової події Ā, протилежної випадковій події А, справджується рівність **P(Ā)=1 – P(A).**

Семінарське заняття 13

Тема. Теореми множення і додавання ймовірностей та їх наслідки

Питання для усного опитування та дискусії

1. Сумісні та несумісні події. Залежні та незалежні події.
2. Умовні ймовірності.
3. Теореми додавання і множення ймовірностей. Наслідки.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : сумісні та несумісні події, залежні та незалежні події. Умовна ймовірность. Теореми додавання і множення ймовірностей. Наслідки.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Випадкові події *A* і *B* називають *сумісними*, якщо вони можуть статися одночасно в одному випробуванні.

У противному разі випадкові події *A* і *B* називаються *несумісними*.

Випадкові події *A* і *B* називають *залежними*, якщо поява однієї з них (*A* або *B*) впливає на ймовірність появи іншої.

У противному разі випадкові події *A* і *B* називаються *незалежними*.

Якщо ймовірність випадкової події А обчислюється за умови, що подія В відбулася, то така ймовірність називається ***умовною*** $P_B(A)$, або $P(A/B)$.

Теореми додавання. Ймовірність суми двох будь-яких довільних випадкових подій А і В дорівнює сумі ймовірностей кожної з них без імовірності їх добутку:

$$\mathbf{P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).}$$

Теореми добутку. Ймовірність добутку двох незалежних подій А і В дорівнює добутку ймовірностей цих подій, тобто

$$\mathbf{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).}$$

Ймовірність добутку двох *залежних подій* A і B дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність другої події, якщо перша вже відбулася.

$$\mathbf{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B).}$$

Задача 1. В урні лежать 20 кульок, з яких 12 білих, решта - чорні. З урни навмання виймають дві кульки. Яка ймовірність того, що вони білі?

Розв'язання.

Загальна кількість елементарних подій випробування (вийнято дві кульки) дорівнює числу способів, якими можна вийняти 2 кульки із 20, тобто числу комбінацій із 20 елементів по 2 ($n = C_{20}^2$). Підрахуємо кількість елементарних подій, які сприяють події «вийнято дві білих кульки». Ця кількість дорівнює числу способів, якими можна вийняти 2 кульки із 12 білих, тобто числу комбінацій із 12 елементів по 2 *(*$m = C_{12}^2$*).*

Отже, якщо подія A - «вийнято дві білі кульки», то

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2}{20 \cdot 19} = \frac{33}{95}$$

Відповідь: $\frac{33}{95}$.

Задача 2. В урні лежать 20 кульок, з яких 12 білих, решта - чорні. З урни навмання виймають три кульки. Яка ймовірність того, що серед вибраних дві кульки білі?

Розв'язання.

Загальна кількість елементарних подій випробування (вийнято три кульки) дорівнює n C_{20}^3.

Обчислимо кількість елементарних подій, які сприяють події «серед трьох вибраних кульок дві білі». Дві білі кульки із 12 білих кульок можна вибрати C_{12}^2 способами, а одну чорну кульку можна вибрати 8 способами, тоді події «серед трьох вибраних кульок дві білі» сприяють $m = C_{12}^2 \cdot 8$ елементарних подій.

Отже, якщо подія A - «серед трьох вибраних кульок дві білі», то

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{12}^2 \cdot 8}{C_{20}^3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 8}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{44}{95}$$

Відповідь: $\frac{44}{95}$.

Задача 3. В урні лежать 15 червоних, 9 синіх і 6 зелених кульок однакових на дотик. Навмання виймають 6 кульок. Яка ймовірність того, що вийнято: 1 зелену, 2 синіх і 3 червоних кульки?

Розв'язання.

В цій задачі випробування полягає в тому, що із урни виймають 6 кульок. Вийняти шість кульок із 15 + 9 + 6 = 30 кульок можна $n = C_{30}^6$ способами. Нас цікавить ймовірність події A - «вийнято 1 зелену, 2 синіх і 3 червоних кульки». Одну зелену кульку можна вийняти C_6^1 способами, 2 синіх кульки можна вийняти C_9^2 способами, 3 червоних кульки можна вийняти C_{15}^3 способами. Отже, події A сприяють $m = C_6^1 \cdot C_9^2 \cdot C_{15}^3$ елементарних подій. Тоді

$$P(A) = \frac{C_{15}^3 \cdot C_9^2 \cdot C_6^1}{C_{30}^6} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25} = \frac{24}{145}$$

Відповідь: $\frac{24}{145}$.

Завдання 1. Навмання складається букет із трьох квіток. Серед квіток є 6 айстр, 5 троянд та 3 ромашки. Знайти ймовірність того, що букет складається:

- а) із трьох троянд;
- б) із трьох ромашок;
- в) із 1 троянди, 1 ромашки та 1 айстри.

Завдання 2. Студент знає 20 питань із 25 програми. Знайти ймовірність, що студент із трьох запитань відповів:

- а) на одне запитання;
- б) на всі запитання;
- в) не відповів на жодне.

Завдання 3. На контроль надійшли вироби, які виготовлені трьома робітниками. Перший виготовив 20 виробів, серед яких 4% браку, другий – 30 виробів, в яких 1% браку, а третій – 50, серед яких 5% браку. Взята навмання деталь виявилась бракованою.

Знайти ймовірність того, що виріб виготовив 3-й робітник.

Завдання 4. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 народжених:

- а) рівно 50 хлопчиків;
- б) не менше 30 і не більше 70.

Завдання 5. Верстат-автомат штампує деталі. Імовірність того, що за зміну не буде випущено жодної нестандартної деталі, дорівнює 0,9. Знайдіть імовірність того, що за три зміни не буде випущено жодної нестандартної деталі.

а) Скількома способами можна скласти розклад перездачі 5 заліків.

б) У спортивній команді, яка складається з 22 чоловік, треба обрати капітана і його заступника. Скількома способами це можна зробити?

в) Скількома способами можна розмістити 6 хлопців та 7 дівчат у гуртожитку в тримісній, чотиримісній та ще двох 3-місних кімнатах.

Формула повної імовірності

Коли подія А може настати тільки при появі однієї із несумісних подій (гіпотез) H_1, H_2,..., H_n, то ймовірність події А знайдемо згідно формули **повної імовірності:**

$$\mathbf{P(A)} = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P_{H_i}(A). \qquad \text{де} \quad \sum_{i=1}^{n} P(H_i) = \mathbf{1}.$$

де $P(H_i)$ – ймовірність гіпотези H_i; $P_{H_i}(A)$ або $P(A/H_i)$ – умовна ймовірність події А при цій гіпотезі.

Формула Бейєса

З формулою повної ймовірності тісно пов'язана формула Бейєса. Якщо до досліду ймовірності гіпотез були $P(H_1)$, $P(H_2)$, ..., $P(H_n)$, а внаслідок досліду подія А відбулася, то можна оцінити ймовірність виконання гіпотези H_i. Нові, умовні ймовірності гіпотез знаходимо за формулою Бейєса (i = 1,2,...,n)

$$\mathbf{P_A(H_i)} = \frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(A)} = \frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{\sum P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}.$$

де $P(H_i)$ – ймовірність гіпотези H_i; $P_{H_i}(A)$ – умовна ймовірність події А при цій гіпотезі.

Формула Бейєса дає можливість переглянути ймовірності гіпотез на підставі врахування спостереження результату досліду.

Задача. Маємо три однакові урни, в кожній з яких по 4 кулі. У першій – 1 біла, 3 чорних; у другій – 2 білих, 2 чорних; у третій – 3 білих, 1 чорна. Із навмання взятої урни навмання вийнято білу кулю. Знайти ймовірність того, що кулю вийнято з i – ї урни $(i = \overline{1,3})$.

Розв'язання. Подія A – вийнято білу кулю – настає після настання однієї з гіпотез $H_i\ (i = \overline{1,n})$ – вибрано i – ту урну

$$P(H_1)=1/3, \qquad P(A/H_1)=1/4;$$
$$P(H_2)=1/3, \qquad P(A/H_2)=2/4;$$
$$P(H_3)=1/3, \qquad P(A/H_3)=3/4.$$

Тоді

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)\,P(A/H_i)=\frac{1}{3}\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\frac{3}{4}=\frac{1}{2}.$$

Необхідні ймовірності можна знайти за формулами Байєса:

$$P(H_1/A)=\frac{\frac{1}{3}\,\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}, \quad P(H_2/A)=\frac{\frac{1}{3}\,\frac{2}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}, \quad P(H_3/A)=\frac{\frac{1}{3}\,\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}.$$

Перевірка: $\sum_{i=1}^{3}p_i=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=1$.

Семінарське заняття 14
Тема. Повторні незалежні випробування

Питання для усного опитування та дискусії

1. Формула Бернуллі,
2. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа.
3. Формула Пуасона

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : схема випробувань Бернуллі, формула Бернуллі, локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа, формула Пуасона.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Нехай проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких випадкова подія А з'являється з однаковою ймовірністю р. Ця схема випадкового експерименту називається схемою Бернуллі. Необхідно знайти ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях подія А з'явиться рівно m раз (m<n). Розв'язком цієї задачі є наступна теорема.

Теорема. Ймовірність Р (m) появи події А m разів в n незалежних випробуваннях обчислюється за формулою

$$P_n(k) = C_n^k\, p^{k}\, q^{\,n-k}$$

На практиці іноді треба знати, яке число подій буде **найімовірнішим,** тобто при якому $\boldsymbol{k_0}$ ймовірність $\boldsymbol{P_n(k)}$ найбільша.

Найімовірніше число появи події $\boldsymbol{k_0}$ знаходиться між числами

$$np-q\le k_0\le np+p\,.$$

Незважаючи на компактність формули Бернуллі, безпосереднє обчислення $\mathbf{P_n(k)}$ за нею при **великих n** пов'язане зі значними труднощами. Наприклад, для визначення ймовірності $P_{100}(50)$ потрібно здійснити понад 200 арифметичних операцій. У таких випадках для спрощення обчислень користуються граничними теоремами (Муавра-Лапласа, Пуассона), які дають формули для наближеного обчислення $\mathbf{P_n(k)}$ с достатньою точністю.

Локальна теорема Муавра-Лапласа

Локальна теорема Муавра-Лапласа дає змогу оцінити окремі ймовірності та їхню поведінку як функцію ***k* при великих *n*** **(**в ***n*** випробуваннях ***n*** подія А відбудеться ***k*** **разів).**

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)\ ;\ \text{де}\ \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ell^{-\frac{x^2}{2}}\ \text{- функція Гауса;}\quad x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\ ;$$

$$\varphi(-x)=\varphi(x)\ \text{– функція парна;}\ \varphi\,(x>5)\approx 0\,.$$

Для цієї функції складена таблиця значень функції $\varphi(x)$.

Дослідження локальної формули Муавра-Лапласа показують, що вона дає досить добрі наближення лише при достатньо **великих *n*,** крім того, ***p*** не повинно бути дуже близьким до 0 або 1, а $npq \geq 9$.

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа дає змогу оцінити ймовірність того, що в ***n*** випробуваннях подія А відбудеться не менше ніж k_1 разів, але не більш як k_2 разів

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_1) - \Phi(x_2).$$

де **Ф(х)** інтегральна функціяЛапласа: $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \ell^{-\frac{z^2}{2}}dz$

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}};\qquad x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

Для цієї функції складена, як і для локальної, таблиця приблизних значень функції . Функція Ф(х) – непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. В таблиці $\Phi(x>5)\approx 0{,}5$.

Теорема Пуассона

У випадках, коли **р** досить мале (рідкісні події), $n\to\infty$ для наближеного обчислення $P_n(k)$ використовують граничну **теорему Пуассона.**

Теорема. Нехай число незалежних випробувань $n\to\infty$, а ймовірність появи події А в кожному випробуванні прямує до нуля так, що $n\cdot p\to\lambda$, де λ - фіксоване невідоме число. Тоді

$$P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}\ell^{-\lambda}.$$

Задача. Монету кидають 6 разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде не менше двох разів.

Розв'язання. р = 0,5 ; q = 1 – р = 0,5**;** $P_6(0) + P_6(1)$ – ймовірність того, що герб випаде менше двох разів.

$P = 1- \{ P_6(0) + P_6(1) \}$ – ймовірність того, що герб випаде не менше двох разів.

$$P_6(0) = C_6^0 * 0{,}5^0 * 0{,}5^6 = 1*1*\frac{1}{64}\ ;$$

$$P_6(1) = C_6^1 * 0{,}5^1 * 0{,}5^5 = 6*\frac{1}{64} = \frac{3}{32}\ ;\ P = 1-\{P_6(0) + P_6(1)\} = \frac{57}{64}\ .$$

Задача. Імовірність виготовлення на верстаті нестандартної деталі дорівнює 0,004. Визначити імовірність того, що з 1000 виготовлених на цьому верстаті деталей 5 будуть нестандартними.

Розв'язання. За умовою n = 1000 ; k=5 ; q = 0,996 ; npq < 9 . Ці числа задовольняють вимогам теореми Пуассона **p< 0,1; n > 50 -** достатньо велике і **npq =** 1000*0,004*0,996 = 3,984 < **9**. Згідно формули Пуассона $P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

Отже, $P_{1000}(5) \approx \frac{4^5}{5!}e^{-4}$.

У додатку таблиць Р(5) = 0,1563. А її дійсне значення, за формулою Бернуллі, дорівнює 0,1552. Таким чином, похибка мала і дорівнює 0,0011.

Задача. Знайти ймовірність появи герба 55 разів у 100 незалежних киданнях монети. Ймовірність появи герба в одному киданні р = 0,5.

Розв'язання. k = 55; n = 100; p = 0,5; q = 0,5;

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{55 - 100 \cdot 0{,}5}{\sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = 1.$$

По таблиці φ (1) = 0,2420. $P_{100}(55) \approx \frac{\varphi(1)}{\sqrt{100 \cdot 0{,}25}} = \frac{0{,}2420}{5}$ = 0,0484.

Задача. Визначити ймовірність того, що кількість ***k*** бракованих виробів становитиме не більш як 70 у партії з навмання взятих 10000 виробів, якщо ймовірність браку кожного виробу дорівнює 0,005.

Розв'язання: n=10000; k_1=0; k_2=70; p=0,005; q=0,995;

Обчислимо $\sqrt{npq} = \sqrt{10000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995} = \sqrt{49{,}75}$ =7,0534.

За інтегральною формулою Муавра-Лапласа

$$P(0 \le k \le 70) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1);$$

$x_1 = \frac{0 - 10000 \cdot 0{,}005}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}} = \frac{-50}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}} = \frac{-50}{7{,}0534}$ = – 7,0888. По таблиці додатку

$\Phi_1(-7{,}0888) = -\Phi_1(7{,}0888) = -0{,}5$;

$x_2 = \frac{70 - 10000 \cdot 0{,}005}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}} = \frac{20}{7{,}0534}$ = 2,8355.

По таблиці $\Phi_2(2{,}84) = 0{,}4977$.

$P(0 \le k \le 70) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$ = =0,4977 – (– 0,5) = 0,04977 + 0,5 = 0,9977.

Семінарське заняття 15
Тема. Дискретні випадкові величини

Питання для усного опитування та дискусії

1. Дискретні випадкові величина (ДВВ).
2. Закони розподілу дискретної випадкової величини.
3. Функція розподілу ДВВ.
4. Числові характеристики ДВВ: математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : дискретна випадкова величина, закони розподілу дискретної випадкової величини, функція розподілу ДВВ, числові характеристики ДВВ: математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Випадковою називається величина, значення якої наперед не відомі і які можуть бути визначені лише внаслідок досліду.

Якщо простір елементарних подій складається з **n** пострілів по мішені, випадковою величиною буде число попадань чи непопадань у мішень. Можливі значення випадкової величини: 0,1,2,..,n .

Якщо випадкова величина набуває скінченої дискретної кількості значень, то її можна задати, вказавши можливі значення випадкової величини та ймовірність їх появи:

Значення випадкової величини	X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
Ймовірність появи	P	p_1	p_2	p_3	...	p_n

При цьому $p_k \geq 0$; $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

Випадкові величини поділяються на *дискретні і неперервні.*

Дискретною випадковою величиною називається величина, можливі значення якої можуть бути пронумеровані в якомусь порядку і записані у вигляді послідовності x_1, x_2 ,…, x_n .

Співвідношення між можливими значеннями випадкової величини та їхніми ймовірностями дістало назву *закону розподілу випадкової величини.*

Випадкова величина X, яка набуває значень *0,1,...,n,* має *біноміальний розподіл* із параметром p ($0 < p < 1$), якщо

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k}\cdot p^k q^{n-k}\ .$$

Випадкова величина X, яка набуває значення *0,1,...,n,* має *розподіл Пуассона* з параметром $\lambda > 0$, якщо

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}\ell^{-\lambda}, \qquad k = 0,1,\ldots,n;\ldots$$

Числові характеристики дискретних випадкових величин

Нехай X – дискретна випадкова величина, яка набуває значень $x_1, x_2,\ldots,x_n,\ldots$ з ймовірностями $p_1, p_2,\ldots,p_n,\ldots$ відповідно.

Математичним сподіванням M(X) називають число (сталу) суми добутків значень x_i на їх ймовірності p_i: $\mathbf{M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + .. + x_np_n}$ **або** $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$.

Дисперсією D(X) дискретної випадкової величини називається математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$\mathbf{D(X) = M\,[X - M(X)]^2} \quad \text{або} \quad \mathbf{D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2}.$$

Середнім квадратичним відхиленням називається величина

$$\sigma = \sqrt{D(X)}\ .$$

Задача. У грошовій лотереї на 100 білетів розігрується один виграш 50 грошових одиниць і 10 виграшів по одній грошовій одиниці. Знайти закон розподілу випадкової величини – вартості можливого виграшу для власника одного лотерейного білета.

Розв’язання. Можливі значення X: $x_1 = 50$; $x_2 = 1$; $x_3 = 0$. Ймовірність цих можливих значень

$$p_1 = P(x_1 = 50) = \frac{1}{100} = 0{,}01;$$

$$p_2 = P(x_2 = 1) = \frac{10}{100} = 0{,}1.$$

Оскільки $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, то

$$p_3 = 1 - (p_1 + p_2),\ p_3 = 1 - (0{,}01 + 0{,}1) = 1 - 0{,}11 = 0{,}89.$$

Шуканий закон розподілу подамо у вигляд таблиці:

X	50	1	0
P	0,01	0,1	0,89

Задача. Знайти числові характеристики дискретної випадкової величини X, розподіл якої задається такою таблицею.

X	-1	0	1	2
P	0,25	0,5	0,1	0,15

Розв'язання. Математичне сподівання

$$M(X) = x_1p_1 + +x_2p_2 + ...+x_np_n.$$

$$M(X) = (-1) \cdot 0,25 + 0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,15 =0,15.$$

Закон розподілу квадрата випадкової величини X

X^2	$(-1)^2$	0^2	1^2	2^2
P	0,25	0,5	0,1	0,15

Знайдемо математичне сподівання квадрата випадкової величини X:

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + ...+ x_n^2 p_n .$$

$$M(X^2) = (-1)^2 \cdot 0,25 + 0^2 \cdot 0,5 + 1^2 \cdot 0,1 + 2^2 \cdot 0,15 = 0,95 .$$

Підставимо в формулу дисперсії

$$D(X) = M(X^2) – [M(X)]^2 = 0,95 – (0,15)^2 = 0,9275;$$

Знайдемо середнє квадратичне відхилення

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,9275} \approx 0,9631.$$

Семінарське заняття 16

Тема. Неперервні випадкові величини

Питання для усного опитування та дискусії

1. Неперевні випадкові величина (НВВ).
2. Функція розподілу НВВ.
3. Числові характеристики НВВ: математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення.
4. Закони розподілу неперервної випадкової величини.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : неперервна випадкова величина, функція розподілу НВВ, числові характеристики НВВ: математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення, закони розподілу НВВ.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Функцією розподілу F(x) ймовірності випадкової величини X називається ймовірність того, що випадкова величина X набуває можливих значень, менших від значення x, де x – будь-яке дійсне число:

$$\mathbf{F(x) = P(X< x).}$$

$$F(x) = P(x_1)+P(x_2)+\ldots+P(x_k) = P(X < x). \qquad F (x) = \sum_{x_k < x} P_i .$$

Неперервні випадкові величини можна задавати або функцією розподілу F(x) = P(X< x) або щільністю (густиною) f(x) її розподілу.

Інтегральна функція або функція розподілу випадкової величини: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Похідну від функції розподілу ймовірності називають *густиною розподілу* випадкової величини: f(x) = F'(x) або диференціальною функцією.

Числові характеристики НВВ

Випадкову величину задають законом розподілу. Однак, якщо закон розподілу невідомий, то використовують числа, які характеризують випадкову величину. Такі числа дістали назву *числових випадкових величин*. До них належать математичне сподівання **M(X),** дисперсія **D(X)** і середнє квадратичне відхилення **σ (X).**

Математичним сподіванням неперервної випадкової величини називається

$$\mathbf{M(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$

Для *оцінки розкиду* випадкової величини відносно її математичного сподівання вводиться поняття дисперсії – D(X). Для неперервної випадкової величини *дисперсія*

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 \cdot f(x)dx \quad \text{або} \quad D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - [M(X)]^2$$

Для неперервної випадкової величини X**,** визначеної на **(*a*, *b*)**

$$D(X) = \int_{a}^{b} x^2 \cdot f(x)dx - [M(X)]^2$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Задача. Випадкова величина X задана законом розподілу:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення. Накреслити графік закону розподілу і показати на ньому математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення.

Розв'язання. Математичне сподівання дискретної випадкової величини обчислюємо за формулою

$$M(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i.$$

Тому M(X) = 0 · 0,2 + 1 · 0,4 + 2 · 0,3 + 3 · 0,08 + 4 · 0,02 = 1,32.

Дисперсію випадкової величини обчислимо за формулою

$$D(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - M(x))^2 p_i.$$

Тоді

$D(X) = 0^2 \cdot 0,2 + 1^2 \cdot 0,4 + 2^2 \cdot 0,3 + 3^2 \cdot 0,08 + 4^2 \cdot 0,02 - 1,32^2 = 0,8966.$

Середнє квадратичне відхилення

$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{0,8966} \approx 0,95.$

Будуємо графік, розподілу і покажемо на ньому математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення.

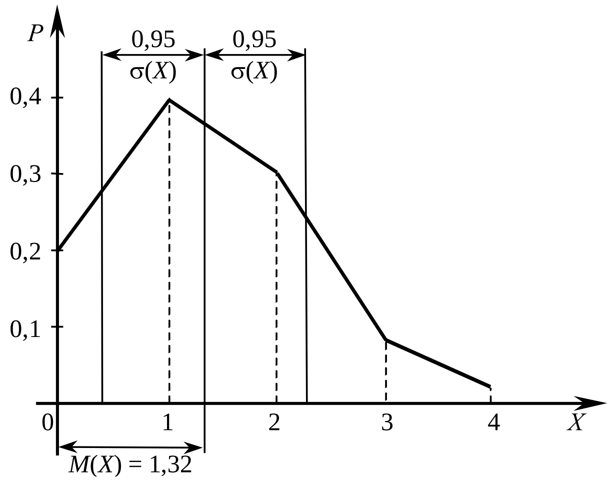


Рис. 5. Графік розподілу випадкової величини X.

Задача. Випадкова величина X задана інтегральною функцією:

$$F(x)=\begin{cases}0, & для \quad x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{100}, & для \quad 0<x\le 10,\\ 1, & для \quad x>10.\end{cases}$$

Необхідно: а) знайти диференціальну функцію (щільність імовірності), б) знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, в) побудувати графіки інтегральної і диференціальної функцій.

Розв'язання. а) знаходимо диференціальну функцію f(x), для чого диференціюємо інтегральну функцію F(x):

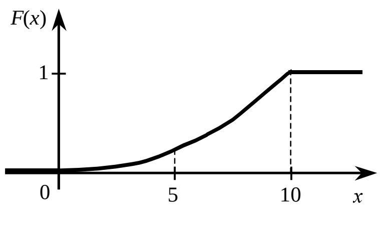
$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & для \quad x\le 0,\\ \dfrac{2x}{100}=\dfrac{x}{50}, & для \quad 0<x\le 10,\\ 0, & для \quad x>10.\end{cases}$$

б) обчислюємо математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

$$M(X)=\int_a^b x\,f(x)\,dx=\int_0^{10} x\cdot\frac{x}{50}\,dx=\frac{1}{50}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{10}=\frac{10^3}{150}=\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}.$$

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2=\int_0^{10} x^2\cdot\frac{x}{50}dx-\left(\frac{20}{3}\right)^2=\frac{1}{50}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^{10}-\frac{400}{9}=5\frac{5}{9}.$$

в) будуємо графіки інтегральної і диференціальної функцій:



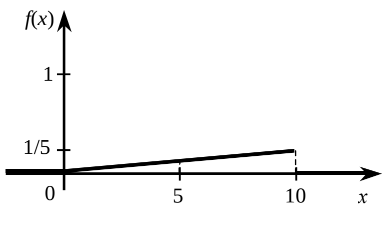


Рис. 6. Графіки інтегральної та диференціальної функцій.

Закони розподілу неперервних випадкових величин

Випадкова величина має *рівномірний* розподіл на відрізку [*a* , *b*], якщо *щільність /густина/* її розподілу незмінна на цьому інтервалі.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b],\\ 0, & x\notin[a,b].\end{cases}.$$

Математичне сподівання та *дисперсія* неперервної випадкової величини:

$$\text{M(X)} = \frac{a+b}{2}; \qquad \text{D(X)} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Середнє квадратичне відхилення: $\sigma = \sqrt{D(X)} = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Ймовірність того, що рівномірно розподілена випадкова величина X потрапить в інтервал (α,β)

$$\text{P} (\alpha \le \text{X} \le \beta) = \frac{\beta-\alpha}{b-a} \quad \text{де} \quad (\alpha, \beta) \in [a,b].$$

Випадкова величина має *нормальний* розподіл із параметрами a та $\sigma > 0$, якщо *щільність* її розподілу

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \ell^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Математичне сподівання нормального розподілу: M(X) = a .

Отже, параметр розподілу a є математичним сподіванням нормально розподіленої випадкової величини.

Таким чином, другий параметр нормального розподілу є середнім квадратичним відхиленням $\sigma = \sqrt{\text{D(X)}}$.

Ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина X потрапить у інтервал (α,β)

$$\text{P}(\alpha < \text{X} < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(\text{x}) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x \ell^{-\frac{x^2}{2}} dx$ – функція Лапласа.

Випадкова величина має *показниковий* розподіл із параметром λ > 0, якщо *щільність* її розподілу

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot \ell^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Функція розподілу показникового розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \ell^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Математичне сподівання, дисперсія та середньоквадратичне відхилення неперервної випадкової величини:

$$\text{M(X)} = \frac{1}{\lambda}; \qquad \text{D(X)} = \frac{1}{\lambda^2}; \qquad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Ймовірність того, випадкова величина X розподілена за показниковим законом потрапить в інтервал (α,β)

$$\text{P}(\alpha < \text{X} < \beta) = \ell^{-\lambda\alpha} - \ell^{-\lambda\beta}.$$

Задача. Знайти математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, розподіленої рівномірно в інтервалі [a ,b], де $a = 0$, b = 1 .

Розв'язання. Оскільки M(X) = $\dfrac{a+b}{2}$; D(X) = $\dfrac{(b-a)^2}{12}$;

$\sigma = \sqrt{D(X)} = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$; M(X)= $\dfrac{1}{2}$; D(X) = $\dfrac{1}{12}$; $\sigma = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

Задача. Знайти ймовірність того, що випадкова величина X потрапить в інтервал *(α, β)*, якщо вона рівномірно розподілена в інтервалі [a ,b], де a = 6; b =12; *α=5, β=8.*

Розв'язання. $\text{P} (\alpha \le \text{X} \le \beta) = \dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$, де *(α,β)* $\in (a,b)$

Інтервал [5;8] не належить до інтервалу [6;12] і тому ймовірність попасти X за інтервал [6;12] дорівнює 0**,** тому будемо знаходити ймовірність попадання в інтервал [6;8]

$\text{P} (6 \le \text{X} \le 8) = \dfrac{8-6}{12-6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.Звідси $\text{P} (5 \le \text{X} \le 8) = \text{P} (6 \le \text{X} \le 8) = \dfrac{1}{3}$.

1.4. Самостійна робота студентів

Самостійна робота студента є однією з основних складових оволодіння навчальним матеріалом і виконується в позааудиторний час, передбачений тематичним планом навчальної дисципліни.

Під час вивчення навчальної дисципліни студенти повинні навчитися самостійно мислити, поглиблювати засвоєні теоретичні знання, опановувати практичні навики з організації праці фінансиста. Розв'язки завдань повинні бути стисло законспектовані у зошиті.

Студенти самостійно опрацьовують навчальний матеріал з одержанням необхідних консультацій від науково-педагогічного працівника протягом семестру. Навчальний матеріал для самостійної роботи виносяться на підсумковий семестровий контроль.

Для виконання тренувальних завдань студент обирає варіант згідно наданими йому номером (в журналі) та параметром k.

1. Обчислити визначники двома способами:

а) за допомогою елементарних перетворень;

б) розклавши за елементами рядка (стовпця)

$$\begin{vmatrix} 1 & k+2 & k+3 & -1 \\ -k-2 & 0 & -1 & k+4 \\ k & 1 & k+3 & -2 \\ k+2 & 7 & 1 & -k-4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} k & k+1 & k+2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ -k & k+2 & -k-2 & 0 \\ 4 & 4 & k & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 2+k \\ -k-1 & -k-2 & 1 & -1 \\ k & k+1 & k & 1 \\ k+1 & k+2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Знайти добуток матриць AB **і** BA

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Розв'язати системи рівнянь:

а) за правилом Крамера; б) матричним способом; в) методом Гауса;

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + kx_3 = 18, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 25, \\ x_1 + x_2 - (k-2)x_3 = 7. \end{cases} \quad \begin{cases} kx_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -9, \\ (k+4)x_1 + x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$$

4. Знайти границі функції, які відповідають Вашому варіанту.

1. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 2x - 3}$.

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 - 5x + 2}{2x^2 - x - 1}$.

3. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{2x^2 - 17x + 35}{x^2 - x - 20}$.

4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4x^2 + x - 5}{x^2 + x - 2}$.

5. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{5x^2 + 4x - 1}{x^2 - 6x - 7}$.

6. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x^2 - 7x - 2}{x^2 - 7x + 10}$.

7. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$.

8. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + x - 6}{2x^2 + 3x - 9}$.

9. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2 - 2x - 5}{x^2 + 5x + 4}$.

10. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{3x^2 - 14x - 5}{2x^2 - 9x - 5}$.

11. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 7x + 6}$.

12. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - x - 6}$.

13. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+x-2}{3x^2+4x-4}$.

14. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2+3x-10}$.

15. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{3x^2-14x-5}{2x^2-9x-5}$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+1}{x^3+2x-4}$.

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^2+4x-3}{4x^2-x-6}$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x-3}{-5x^2+x+2}$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-7x-1}{x^4-6x+1}$.

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-4x+1}{2x^3+2x-4}$.

5. Знайти похідні функцій, які відповідають Вашому варіанту.

1. $y=2x^3+4\sqrt{x^7}-\mathrm{tg}\,x.$

2. $y=\dfrac{4}{x}-3\sqrt[3]{x^2}+3\sin x.$

3. $y=3x^2+8\sqrt[4]{x}-5\,\mathrm{arctg}\,x.$

4. $y=\dfrac{1}{4}x^4-2\sqrt{x}+\arcsin x.$

5. $y=\dfrac{5}{x^3}+6\sqrt[3]{x}-7\log_2 x.$

6. $y=\dfrac{2}{x^6}+10\sqrt[5]{x}-3e^x.$

7. $y=2x^7+8\sqrt[4]{x^3}-\cos x.$

8. $y=\dfrac{8}{x}+4\sqrt{x^3}+2\ln x.$

9. $y=\dfrac{1}{2x^4}-5\sqrt[5]{x^2}+6\sin x.$

10. $y=\dfrac{x^4}{2}+6\sqrt[3]{x^2}-3\cos x.$

11. $y=\dfrac{2}{x^3}+5\sqrt[5]{x^2}-2\arccos x.$

12. $y=\dfrac{1}{3x}-9\sqrt[3]{x^4}-5\cdot4^x.$

13. $y=\dfrac{2}{5}x^5+8\sqrt[4]{x}-3\,\mathrm{arcctg}\,x.$

14. $y=\dfrac{1}{2}x^4+6\sqrt[6]{x^2}-4\log_3 x.$

15. $y=7x^3+3\sqrt{x^5}-3^x.$

16. $y=\mathrm{tg}\left(3x^2+x-2\right).$

17. $y=\mathrm{arctg}\left(2x^2-1\right).$

18. $y=3^{2x^3-4x+3}.$

19. $y=\sqrt[5]{\left(2x^2-4x+5\right)^2}.$

20. $y=\arccos\left(3x^2+5\right).$

6. Обчислити інтеграли:

1. $\int\left(3x^5+\cos x-\dfrac{2}{x^2-9}\right)dx$.

2. $\int\left(4x^3-5e^x+1\right)dx$.

3. $\int\left(\dfrac{3}{4}\sqrt{x}+3^x-\sin x\right)dx$.

4. $\int\left(\dfrac{3}{\sqrt{9-x^2}}+4\mathrm{tg}x-9\right)dx$.

5. $\int\left(8x-\dfrac{9}{\cos^2 x}+2\right)dx$.

6. $\int\left(2x^3-\sqrt{x}+\dfrac{4}{x}\right)dx$.

7. $\int\left(\sqrt[3]{x}-\mathrm{ctg}x+3\right)dx$.

8. $\int\left(3x^2-\dfrac{5}{\sin^2 x}+4\right)dx$.

9. $\int\left(5x^4-3e^x+\frac{8}{x^3}\right)dx$. **10.** $\int\left(\cos x-\frac{4}{x^2+16}+x\right)dx$.

11. $\int\left(5x-3\text{ctg}x+\frac{4}{x^3}\right)dx$. **12.** $\int\left(4^x-\frac{2}{\sqrt{x^3}}+1\right)dx$.

13. $\int\left(x^2-\frac{3}{\sin^2 x}-5\right)dx$. **14.** $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}-2x^5+3}{x}dx$.

15. $\int\left(2x^3-\frac{4}{\sqrt{5+x^2}}+7\right)dx$. **16.** $\int\left(4x^5+\frac{6}{\cos^2 x}-5\right)dx$.

17. $\int\left(7\sqrt[4]{x^3}-3e^x+\frac{4}{x}\right)dx$. **18.** $\int\left(3x^2-5\text{tg}x+2\right)dx$.

19. $\int\left(7x^6+\frac{3}{x^2-9}+2\right)dx$. **20.** $\int\left(5x^4+4\sin x-\frac{2}{x}\right)dx$.

Індивідуальні завдання

З цієї навчальної дисципліни можливе (за бажанням студента) виконання презентацій за наступною орієнтовною тематикою:

Теми презентацій

1. Способи розв’язування систем рівнянь.
2. Розв’язування вправ з аналітичної геометрії.
3. Границя функції однієї і двох змінних.
4. Застосування диференціального числення.
5. Дії з комплексними числами.
6. Основні прийоми інтегрування.
7. Ознаки збіжності числових рядів.
8. Розв’язування диференціальних рівнянь першого порядку.
9. Розв’язування диференціальних рівнянь вищих порядків.
10. Елементи комбінаторики (розв’язування вправ).
11. Основні теореми теорії ймовірностей.
12. Використання векторної алгебри, теорії матриць і визначників у економіці.
13. Відшукання границь послідовностей.
14. Застосування похідної в економіці.

1.5. Підсумковий контроль

Підсумковий семестровий контроль проводиться у формі письмового екзамену в тестовій формі.

1.5.1. Питання для підсумкового контролю

1. Поняття визначника квадратної матриці.
2. Визначник другого порядку та його обчислення.
3. Визначник третього порядку.
4. Мінори та алгебраїчні доповнення елементів визначника.
5. Розклад визначника за елементами рядка або стовпця.
6. Основні властивості визначників.
7. Поняття матриці. Види матриць.
8. Дії над матрицями.
9. Множення матриць та його властивості.
10. Одинична та нульова матриці.
11. Обернена матриця та умови її існування.

12. Обчислення оберненої матриці методом алгебраїчних доповнень.
13. Поняття СЛАР та її матричний запис.
14. Класифікація СЛАР за кількістю розв’язків.
15. Метод Крамера розв’язування СЛАР.
16. Метод оберненої матриці.
17. Метод Гауса.
18. Умова сумісності системи лінійних рівнянь.
19. Поняття функції. Область визначення та область значень.
20. Способи задання функцій.
21. Основні елементарні функції та їх властивості.
22. Парні та непарні функції.
23. Монотонність функції.
24. Обернена функція та умови її існування.
25. Поняття границі функції в точці.
26. Односторонні границі.
27. Нескінченні границі.
28. Основні властивості границь.
29. Основні теореми про границі.
30. Визначні границі.
31. Поняття неперервності функції в точці.
32. Неперервність функції на проміжку.
33. Точки розриву та їх класифікація.
34. Властивості неперервних функцій.
35. Неперервність елементарних функцій.
36. Теореми про неперервні функції.
37. Поняття похідної функції в точці.
38. Геометричний та економічний зміст похідної.
39. Похідні основних елементарних функцій.
40. Правила диференціювання.
41. Похідна складеної функції.
42. Похідна неявно заданої функції.
43. Поняття диференціала функції.
44. Геометричний зміст диференціала.
45. Властивості диференціалів.
46. Застосування диференціала до наближених обчислень.
47. Правило Лопіталя.
48. Умови зростання і спадання функції.
49. Екстремуми функції та необхідні умови їх існування.
50. Достатні умови екстремуму.
51. Найбільше і найменше значення функції.
52. Опуклість і вгнутість графіка функції.
53. Точки перегину.
55. Поняття первісної та невизначеного інтеграла.
56. Основні властивості невизначеного інтеграла.
57. Таблиця основних інтегралів.
58. Метод заміни змінної.
59. Інтегрування частинами.
60. Поняття визначеного інтеграла.
61. Геометричний зміст визначеного інтеграла.
62. Основні властивості визначеного інтеграла.
63. Формула Ньютона-Лейбніца.
64. Заміна змінної та інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

65. Обчислення площ плоских фігур.
66. Випадкова подія та її види.
67. Простір елементарних подій.
68. Класичне означення ймовірності.
69. Основні властивості ймовірності.
70. Протилежна подія.
71. Неможлива та достовірна події.
72. Сума подій та теорема додавання ймовірностей.
73. Добуток подій.
74. Умовна ймовірність.
75. Теорема множення ймовірностей.
76. Незалежні події.
77. Повна група подій.
78. Схема випробувань Бернуллі.
79. Формула Бернуллі.
80. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа.
81. Формула Пуасона.
82. Найбільш ймовірне число появ події.
83. Граничні теореми для схеми випробувань Бернуллі.
84. Біноміальний розподіл.
85. Поняття випадкової величини.
86. Закон розподілу дискретної випадкової величини.
87. Функція розподілу та її властивості.
88. Математичне сподівання.
89. Дисперсія та середньоквадратичне відхилення.
90. Основні закони розподілу дискретних величин.
91. Неперервна випадкова величина та її щільність розподілу.
92. Функція розподілу неперервної випадкової величини.
93. Властивості щільності розподілу.
94. Математичне сподівання неперервної величини.
95. Дисперсія неперервної випадкової величини.
96. Рівномірний розподіл.
97. Показниковий розподіл.
98. Нормальний закон розподілу.
99. Ймовірність попадання величини в заданий інтервал.

1.5.2. Структура екзаменаційного білета

№		Бали
1	Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}$. Відповіді: 1. 5; 2. 27; 3. 0; 4. 9.	4
2	Для матриці розмірності m × n число m дорівнює числу …. 1) стовбців; 2) рядків; 3) добутку всіх членів матриці; 4) інша відповідь.	3
3	У коробці 5 білих і 3 чорних кульки. Витягують дві без повернення. Яка ймовірність, що обидві кульки будуть чорними? 1) 3/8 2) 3/28 3) 9/6 4) 15/56.	5
4	Яку величину називають імовірністю події? 1) відношення кількості можливих наслідків до кількості сприятливих; 2) відношення кількості сприятливих наслідків до кількості всіх можливих; 3) добуток кількості можливих і сприятливих наслідків; 4) суму кількості можливих і сприятливих наслідків.	3
5	Обчислити значення функції $y=\sqrt{4+x^2-x^3}$ в точці $x=-2$. 1) 4; 2. 0; 3. $\sqrt{6}$; 4. $0{,}5$.	4
6	Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x^6}{sin\ 6x^6}$ Відповіді: 1. 5 ; 2. 6; 3. 5/6; 4. 1.	4
7	Знайти похідну функції: $y=arctgx+x^4$ в точці $x=1$ 1. 1/2 ; 2. 1; 3. 5; 4. 4,5.	4
8	Знайти границю за допомогою правила Лопіталя $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin x}$. 1. e; 2. 1; 3. 0; 4. 2.	4
9	Знайти $\int\left(\frac{7}{1+x^2}\right)dx$. 1. $7\left(1+x^2\right)+C$; 2. $7\operatorname{arctg}x+C$; 3. $7\operatorname{tg}x+C$; 4. $7\ln\lvert x\rvert+C$.	4
10	Обчислити визначений інтеграл $\int_{-6}^{-5}(x+5)^4\,dx$. 1. $-\frac{2}{5}$; 2. $\frac{3}{5}$; 3. $\frac{1}{5}$; 4. $\frac{4}{5}$.	5
	Всього	40

2. Схема нарахування балів

2.1. Нарахування балів студентам з навчальної дисципліни здійснюється відповідно до такої схеми:

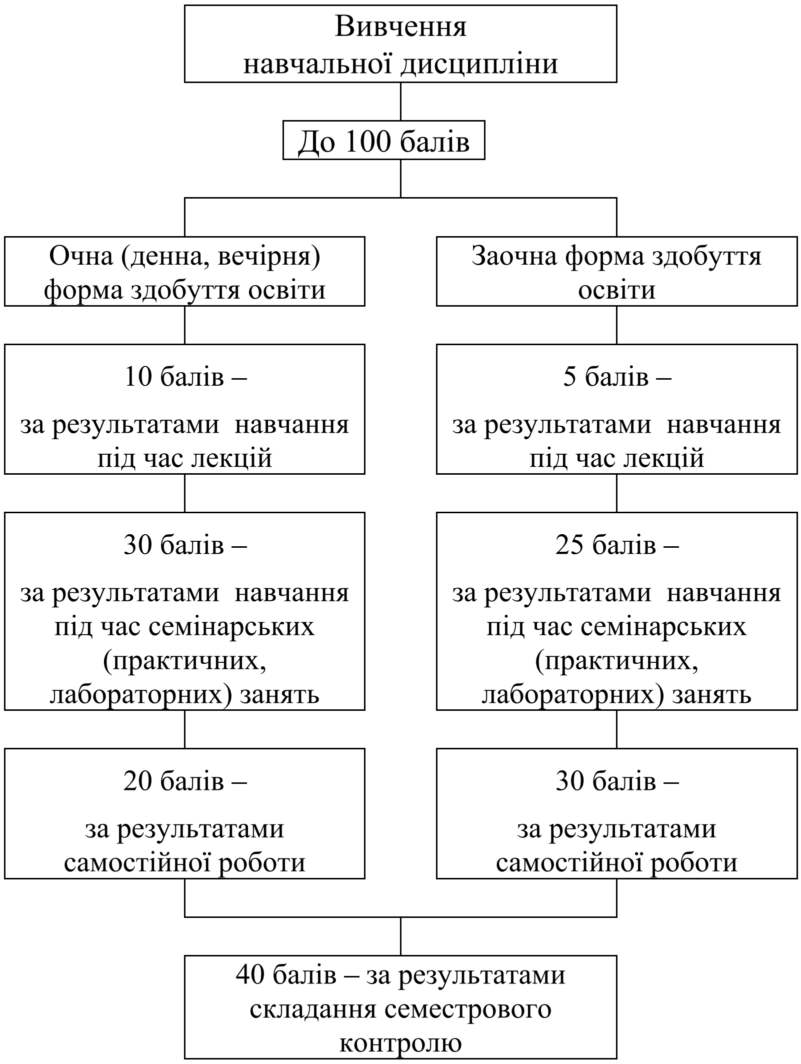


Рис. 7. Схема нарахування балів студентам за результатами навчання

2.2. Обсяг балів, здобутих студентом під час лекцій з навчальної дисципліни, обчислюється у пропорційному співвідношенні кількості відвіданих лекцій і кількості лекцій, передбачених навчальним планом, і визначається згідно з додатками 1 і 2 до Положення про організацію освітнього процесу в Хмельницькому університеті управління та права імені Леоніда Юзькова.

З цієї навчальної дисципліни передбачено проведення 5 лекційних занять за заочною формою навчання.

Отже, студент може набрати під час лекцій таку кількість балів:

Кількість лекцій за планом	Кількість відвіданих лекцій					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**Консультація до іспиту**
	1	2	3	4	5	

2.3. З цієї навчальної дисципліни передбачено проведення 4 семінарських занять за заочною формою навчання.

За результатами семінарського (практичного, лабораторного) заняття кожному студенту до відповідного документа обліку успішності виставляється кількість балів від 0 до 5 числом, кратним 0,5, яку він отримав протягом заняття.

Критерії поточного оцінювання знань студентів наведені у п.4.3.8. Положення про організацію освітнього процесу в Хмельницькому університеті управління та права.

2.4. Перерозподіл кількості балів в межах максимально можливої кількості балів за самостійну роботу студентів та виконання індивідуальних завдань, наведено в наступній таблиці:

№ з/п	Алгоритм нарахування балів	Номер теми			Усього балів
		3	5, 6	7, 10	
1.	Максимальна кількість балів за одну розрахункову роботу з відповідної теми	10	10	10	30
	Усього балів				30

2.5. За семестровий контроль, що проводиться у формі семестрового екзамену з навчальної дисципліни «Вища та прикладна математика», студент може максимально одержати 40 балів. Шкала визначення кількості балів та критерії оцінювання знань студентів за результатами семестрового контролю подана у табл. 4.8 Положення про організацію освітнього процесу в Хмельницькому університеті управління та права імені Леоніда Юзькова.

Перерозподіл балів, в межах максимально можливого одержання їх кількості за надані студентами відповіді на завдання екзаменаційного білета, наведено в таблиці.

№ п/п	Алгоритм нарахування балів	Номер питань екзаменаційного білета / кількість балів										Разом балів
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1.	Кількість балів за відповідь на питання	3	3	4	4	4	4	4	4	5	5	40
	Усього балів	3	3	4	4	4	4	4	4	5	5	40,0

3. Рекомендовані джерела

3.1. Основні джерела

1. Барабаш О.В., Мусієнко А.П., Собчук В.В. Вища математика для економістів. 2019. URL:http://www.dut.edu.ua/ru/lib/1/category/725/view/1883
2. Барковський В.В. Вища математика для економістів: навчальний посібник / В.В. Барковський, Н.В. Барковська. К.: Центр учбової літератури, 2010. 448 с. URL:https://app.box.com/s/dwv9reh2y2eek18zynw2pn8xohruvm2i
3. Бугір М.К. Математика для економістів: Посібник. К.:Видав.центр Альматеор, 2003. 520 с. URL:http://lib.istu.edu.ua/index.php?p=34&id=1134&par=223&page=1
4. Дубовик В.П. Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. К. : Ігнатекс-Україна, 2013. 150 с.
5. Гречнєва М. О., Стєганцева П. Г. Вища математика : навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра другої предметної спеціальності «Середня освіта (Інформатика)». Запоріжжя : ЗНУ, 2023. 154 с.
6. Дюженкова О.Ю. Вища математика. Практикум. Навчальний посібник / О.Ю. Дюженкова, М.Є. Дудкін, І.В. Степахно. К.: НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2021. 409 с. Бібліогр.: 409 с. URL https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/e193d048-1bd7-4120-b86a-f65337aa5493/content
7. Кацала Р.А. Математика для економістів (Методичні вказівки до практичних занять для студентів економічних спеціальностей). Ч. 2. Теорія ймовірностей і математична статистика / Уклад.: Р.А. Кацала, Ю.Ю. Млавець, О.О. Синявська, М.М. Шаркаді. Ужгород: ДВНЗ "УжНУ", 2024. 60 с.
8. Рудницький В.Б. Вища математика: навчальний посібник / В.Б. Рудницький, В.І. Делей. Хмельницький, 2004. 308с. URL:https://studfile.net/preview/5064960/
9. Чемерис О. Вища математика : навчально-методичний посібник для організації самостійної роботи здобувачів нематематичних спеціальностей. Частина 1. Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2024. 49 с.
10. Хом'юк, І. В. Вища математика. Частина 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : практикум / І. В. Хом'юк, В. В. Хом'юк. – Вінниця : ВНТУ, 2020. – 70 с. ISBN 978-966-641-799-5
11. Хом'юк, І. В. Вища математика. Ч. 1. Функції багатьох змінних : практикум / І. В. Хом'юк, В. В. Хом'юк. – Вінниця : ВНТУ, 2020. – 70 с. ISBN 978-966-641-799-5
12. Шелестовський Б.Г Вища математика: теорія ймовірностей та математична статистика. Навчальний посібник / Шелестовський Б.Г., Габрусєв Г.В., Габрусєва І.Ю. Тернопіль: СМП "Тайп", 2023. 142 с.

3.2. Допоміжні джерела

13. Булдигін В.В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / В. В. Булдигін, І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова; за ред. проф. В. В. Булдигіна. К. : ТВіМС, 2021. 224 с. URL: http://matan.kpi.ua/public/files/Posibnyk%20LA+AG.pdf
14. Денисекно Н.Л. Вища математика. Елементи лінійної і векторної алгебри, аналітична геометрія. Практикум: навч. посіб. КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Н. Л. Денисенко, В. Ф. Зражевська. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. 168 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstreams/d90613a4-0079-47dd-bb6a-8f482ec9ee70/download

15. Нечипоренко Н.О. Індивідуальні розрахунково-графічні завдання з дисципліни «Вища математика» для студентів економічних спеціальностей денної форми навчання / Укл.: Нечипоренко Н.О. – Запоріжжя: НУ “Запорізька політехніка”, 2024. – 54 с.
16. Вища математика. Модуль 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / Антоненко В.Ф., Клюс І.С., Горідько Р.В., Чуб Л.О. К. : Книжкове вид-во НАУ, 2006. 300 с.
17. Вища математика. Модуль 2. Вступ до математичного аналізу. Диференційне числення функцій однієї змінної: Навч. посібник / Крисак Я.В., Левковська Т.А., Горідько Р.В. [та ін.] К. : НАУ-друк, 2006. 284 с.
18. Вища математика. Модуль 3. Невизначений та визначений інтеграли: Навч. посібник / Ластівка І.О., Коновалюк В.С., Ковтонюк І.Ю. [та ін.] К. : НАУ-друк, 2007. 208 с.
19. Лубенська Т.В. Вища математика. Модуль 4. Диференціальне числення функцій багатьох змінних: Навч. посібник / Т.В. Лубенська, Л.Д. Чупаха, В.І. Трофименко К. : Книжкове вид-во НАУ, 2006. 116 с.
20. Грищенко В.О., Юхименко А.І. Теорія ймовірностей і математична статистика для економістів: навчальний посібник / В.О. Грищенко, А.І. Юхименко. К.: Київський національний торгово-економічний університет, 2000. 168 с.
21. Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування: навчальний посібник/ С.І. Наконечний, С.С. Савіна. К.: КНЕУ, 2003. 452 с.

4. Інформаційні ресурси в Інтернеті

1. Офіційний сайт Електронна платформа вищої математики, математичного моделювання та фізики URL: https://duikt.edu.ua/ua/
2. Офіційний сайт Інституту економіки та прогнозування Національної академії наук України. URL: http://ief.org.ua
3. Офіційний сайт Інституту економічних досліджень та політичних консультацій. URL: http://www.ier.com.ua
4. Офіційний сайт Міжнародного валютного фонду. URL:http://www.imf.org/external/
5. Офіційний сайт Міністерства розвитку економіки, торгівлі та сільського господарства України.
   URL: http://www.me.gov.ua.